Dr. Czeglédy István: Kompetenciaalapú matematikaoktatás

Bevezetés

Üdvözlöm!

Ön valószínűleg tanár szakos hallgató, matematika szakképzettségen – valamelyik felsőoktatási intézményben – tanuló hallgató, vagy olyan általános iskolai tanári diplomával rendelkező mesterképzésben résztvevő hallgató, akinek szüksége van a szakmódszertani ismeretekre, esetleg olyan középiskolai tanár, aki szeretné megújítani, felfrissíteni, pótolni, fejleszteni – esetleg elhalványult, vagy régimódi – a matematika tanításával kapcsolatos ismereteit.

Ha Ön nem sorolható be a fenti kategóriákba, hanem csak érdeklődik a matematikatanítás újabb irányzatai iránt, esetleg – ennek alapján – segítséget kíván nyújtani gyermekeinek, hozzátartozójának, ismerősének, akkor külön üdvözlendő, hogy tanulmányozza elektronikus tananyagunkat.

Az Ön esetében olyan érdeklődő személyről van szó, aki igényli a megújulást, aki a szakmódszertani kutatások újabb eredményeit be akarja építeni mindennapi munkájába, esetleg hatékonyan akar segíteni az arra rászorulóknak. Ön olyan személy, aki nem nyugszik bele az esetleges kisebb-nagyobb matematikatanítással kapcsolatos kudarcokba, aki szeretné, hogy tanítványai ne nyűgnek, ne unalmas időpocsékló, elvégzendő felesleges feladatnak tartsák a matematikatanulást, hanem egy érdekes, szórakoztató, ugyanakkor elmét csiszoló, a gyakorlatban alkalmazható tevékenységnek.

Meggyőződésem, hogy ez a kurzus ehhez segítséget nyújt Önnek. Sikeres tanulmányozást és még sikeresebb gyakorlati alkalmazást kíván a szerző.

Fő célkitűzésünk:

- megmutatni a matematikatanításunk jelenlegi legégetőbb problémáit,
- választ adni arra, hogy miért tanuljuk-tanítjuk a matematikát,
- elemezni azokat a feltételeket, amelyek a sikeres tanuláshoz nélkülözhetetlenek,
- kifejteni a matematikatanulás cél-, feladat- és követelményrendszerét,
- ismertetni az egyes matematikai kompetenciaterületek fő ismérveit, valamint ezeknek a tanításban való megvalósíthatóságát,

– példát adni arra, hogy hogyan tudunk felkészülni egy matematikaórára úgy, hogy lehető legtöbb kompetenciát fejleszthessünk,
– segítséget adni olyan feladatok, feladatsorok kiválasztásához, amelyek megoldása során a legtöbb kompetenciaterületet fejleszthetjük,
– megmutatni, elemezni azokat a munkaformákat, módszereket, eszközöket, amelyek alkalmazásával a tartalmi vonatkozásban fellelhető célok közül a legtöbb megvalósítható.

Összegezve:

Segítséget kívánunk adni ahhoz, hogy a matematikaórákra alaposan fel tudjon készülni az olvasó, és olyan órát, foglalkozást tartson, amelyiken a legkisebb energiával a legtöbbet ki tudja hozni tanítványaiból.

Tanulási időszükséglet

A kurzus anyagának feldolgozásához szükséges időtartam személyfüggő. Azok a tanárok, akik már rendelkeznek általános iskolai, vagy középiskolai tanári diplomával, van szakmai gyakorlatuk és „éles helyzetben" ki tudják próbálni az általunk javasolt tárgyalási módokat viszonylag kevés idő elég a tananyag feldolgozásához. Ezeknek a személyeknek az elméleti anyag elsajátítására 10 óra elég, és közel ugyanennyi szükséges a gyakorlatban való alkalmazásra. (Kontakt órák tartása saját osztályokban.)

Az olyan hallgatóknak, akiknek nincs szakmai gyakorlatuk, akik most vesznek részt először szakmódszertani képzésben, legalább 24 óra szakmódszertani elméleti kurzus és legalább 10 óra gyakorlóiskolai tanítási gyakorlat szükséges, ahol szakvezető, vagy mentor irányításával végzik a munkát a hallgatók.

(Az iskolai tanítási gyakorlatok szervezése, lebonyolítása az adott intézmény szakmódszertani csoportjának a feladata. Az elmélet és a gyakorlat szerves egységet alkot, de ebben a tantárgyleírásban csak az elméleti ismeretek kifejtésére kerül sor.

Tanulási folyamat, tanulási módszerek

Javasoljuk, hogy a tananyag egyes részeiben leírtakat tanulják meg, az ajánlott irodalmat olvassák el, és ezen ismeretek birtokában oldják meg az adott részhez kijelölt gyakorlati feladatokat. Ezeket célszerű beküldeni a kurzus vezetőjének, aki az értékelés után visszaküldi azt a hallgatónak.

A tananyag tartalmi egységei:

1) Az iskolai matematikaoktatás jelenlegi problémái és jövőbeni feladatai.

2) Miért tanítjuk a matematikát?

A matematikatanítás cél-, feladat- és követelményrendszere. Képességek, jártasságok, készségek fejlesztése a matematikaoktatásban.

3) Az értékes, érvényes, hasznosítható tudás jellemzői.

Műveltség, szakértelem, kompetencia.

Tanári kompetenciák, tanulói kompetenciák.

4) Az ismeretszerzés és a fogalomalkotás fázisai a kompetenciaalapú matematikaoktatásban.

5) Képességek, jártasságok, készségek kialakítása a kompetenciaalapú matematikaoktatásban.

6) A matematikatanítás során kialakítandó és fejlesztendő tanulói kompetenciaterületek:

I. Értő olvasás, szövegértelmezés.
II. Problémamegoldásra való képesség.
III. Számolási készség.
IV. Gondolkodási műveletekben való jártasság.
V. A kreatív személyiségtulajdonságok.
VI. Algoritmikus gondolkodásra való képesség.
VII. A megoldás megtervezésének képessége, tervszerűség, célszerűség.
VIII. Kombinatorikus gondolkodás.
IX. Gyakorlati alkalmazásra való képesség.
X. Függvényszerű gondolkodásmód.
XI. Tájékozódás térben és időben.
XII. Bizonyítási igény, ítélőképesség.
XIII. Geometriai transzformációk felismerése és alkalmazása a gyakorlatban.
XIV. Valószínűségszámítás alkalmazása a mindennapi életben.

Az egyes kompetenciaterületek fejlesztési lehetőségét minden korosztály számára megfelelő feladatsorokon keresztül mutatjuk be, eszközöket, munkaformákat, módszereket javaslunk hozzá, és az ideális tanári-tanulói tevékenységet is elemezzük.

Célkitűzések, követelmények

Reményeink szerint a kurzus elvégzése után a hallgatókban kialakulnak, illetve továbbfejlődnek az itt felsorolt tanári kompetenciák.

a) A tanulás tanítása.

b) Az egyéni képességek, szükségletek, lehetőségek figyelembevétele.
c) Változatos munkaformák, módszerek, eszközök alkalmazása.
d) A differenciált foglalkoztatás megtervezése.
e) A feladatok tudatos, célirányos válogatása olyan szempont szerint, amely feladatsorral a kívánt kompetenciaterületek optimálisan fejleszthetők.
f) A tanulók motivációs rendszerének megismerése, a tanórai differenciált motivációbázis megtervezése.
g) A kérdéstechnika, kérdéskultúra, továbbá a tanár-diák kommunikáció fejlesztése.
h) Szakmai elkötelezettség.
i) Pedagógiai, pszichológiai, módszertani kulturáltság.

Mindezen tanári kompetenciák elsajátításáról az egyes fejezetek végén található feladatok megoldásával adhat számot az olvasó.

1. Az iskolai matematikaoktatás jelenlegi problémái és jövőbeni feladatai

Olvassa el figyelmesen a fejezetet. Akkor haladjon tovább a tananyagban, ha hibátlanul tud válaszolni a kérdésekre.

Az iskolai matematikaoktatásnak – és általában az oktatásnak – sok nehézséggel kell szembesülnie. Ezek a nehézségek a társadalom minden területén jelentkeznek, és bizonytalanságot okoznak.
Bizonytalan a pedagógus abban, hogy mit, mennyit, hogyan tanítson, és milyen szinten követeljen, bizonytalan a szülő, mert a társadalmi elvárások nagyon sokszor nincsenek összhangban az iskolai oktatással, s bizonytalanok a tanulók is – minden szinten – hogy mit, miért és hogyan tanuljanak, és miért éppen az a tananyag, amit el kell sajátítaniuk.

A nehézségek a következő okokra vezethetők vissza:

1) Az utóbbi évtizedekben, években felgyorsult a *gazdasági, technikai fejlődés*, óriási *társadalmi változások* mentek végbe. Ez a fejlődés folyamatos, és nagy valószínűséggel még nagyobb léptékű lesz a jövőben. Adott a kérdés: Milyen tudásra, képességre, készségre lesz szüksége a ma tanulójának a felnőtt – munkaképes – korban. Milyen ismeretekkel, képességekkel kell rendelkeznie ahhoz, hogy a

munkaerőpiacon reális esélyekkel pályázzon megfelelő munkára, azaz be tudjon illeszkedni a társadalomba.

2) *Minden tudományterületen hatalmas fejlődéseket* tapasztalunk. Míg korábban – évtizedekkel ezelőtt – egy matematika tankönyv akár 10 évig is megállta a helyét, korszerűnek volt tekinthető, addig ma már akár évente át lehetne dolgozni a tankönyveket. (Már csak az adatok aktualizálása miatt is, de tartalmi és módszertani okok is szükségessé teszik az átdolgozást)

   Megállapíthatjuk, hogy az iskola nem tudja egész életre – vagy annak jelentős részére – érvényes tudással ellátni a tanulót.

   Mi az oktatás teendője? Hogyan tudjuk a tanulókat olyan ismeretekkel ellátni, amelyek birtokában később fejlesztheti önmagát, és alkalmazkodni tud a társadalom elvárásaihoz? Az egyes tudományágak fejlődéséből adódó rohamosan bővülő ismeretanyagból mi és hogyan építhető és építendő be az iskolai tananyagba úgy, hogy ezt a tanulók még fel tudják dolgozni, el tudják sajátítani és tudják is alkalmazni.

3) Az is nagy gondot jelent az oktatásban, hogy *számos ismeretanyag, tudás elévül,* jönnek *új tudáselemek, új eljárások, hasznos* – munkát gyorsító és könnyítő – *eszközök*. Mit hagyhatunk ki a tananyagból, és hogyan építhetjük fel az ismeretrendszert ilyen alapok hiányával.

   Példaként elég csak annyit megemlíteni, hogy a számológépek elterjedésével a szögfüggvénytáblázatok, a logaritmus és hatványtáblázatok használata teljesen kiküszöbölhető, mint ahogy feleslegessé válhat a forgásszögek, negatív szögek tanítása is, hiszen néhány billentyű megoldja a problémákat.

   Adott a kérdés. Kihagyhatjuk ezen anyagrészek tanítását, vagy nem, és, ha kihagyjuk, akkor hogyan építsük fel a szögfüggvények, vagy a logaritmus struktúráját? A problematikus témaköröket még hosszan lehetne sorolni.

4) Az információ-hordozó anyagok elterjedésével *jelentősen változott a tudásszerzés és tudásátadás helyszíne*. Tudomásul kell vennünk, hogy már nem az iskola az ismeretszerzés, a tanulás egyetlen és legfontosabb bázisa. A televízió, a rádió, a számítógépek tudásátadásban, tudatformálásban jelentkező szerepe jelentősen megnőtt.

Kérdés: mit, mennyit, hogyan tanítsunk az iskolában, illetve mennyiben és hogyan támaszkodjunk az egyéb forrásokra? Elutasítani a média szerepét legalább olyan káros, mint teljes egészében erre építeni az oktatást. Az arányok megtalálása a pedagógus elsőrendű feladata.

5) A társadalom, a gazdaság a *közvetlenül alkalmazható tudást* követeli meg. A társadalom, a vállalatok nem tudnak hosszú időt – és költséget – fordítani arra, hogy új szakembert – legyen az pedagógus, orvos, mérnök, kőműves, ács stb. – az adott munkára kiképezzék.
   Adódik a kérdés. Hogyan elégíthető ki a társadalom ilyen irányú igénye úgy, hogy a tanítási-tanulási folyamat pedagógiai alapelvei ne sérüljenek. Azaz visszatérő kérdés: mit, mennyit, hogyan tanítsunk?

6) A nemzetközi mérések a magyar diákok folyamatos lemaradásáról írnak. Azt vetik *a magyar oktatás* szemére, hogy „*lexikális tudás központú*”, ahelyett, hogy az alkalmazásra helyeznék a nagyobb hangsúlyt. Különösen fájó, hogy az értelmes, elemző olvasás területén a középmezőny alatt vagyunk, s a tanulók nagy százaléka funkcionális analfabéta. Csak olvassák a szöveget, de nem értik, a lényeges jegyeket nem tudják kiemelni, a feleslegeseket elvetni, nem látják az összefüggéseket az adatok között stb. Azaz éppen a társadalmi beilleszkedéshez, az alkalmazkodáshoz, a kommunikációhoz szükséges tulajdonságokkal nem rendelkeznek.

7) Nemkülönben fontos terület a *motiváció*. Hogyan tudjuk a rábírni tanulóinkat az ismeretszerzés nagyon energiaigényes, fárasztó, rendszerességet igénylő munkájára. Sajnos a közoktatásban résztvevő tanulók jelentős része alulmotivált. Nem látják tanulásuknak értelmét, hiányzik legtöbbjüknél az érdeklődés, a kitartás, az akarat. Ezt még rontja a céltudatosság hiánya. Nagyon lehangoló – sőt lehetetlen – olyan cél eléréséért küzdeni, amit nem tűztünk ki magunk elé. Meg kell találnunk annak a módját, hogy a tanulás ismét rangot jelentsen, és társadalmi elismertséget eredményezzen.
   Kérdés: hogyan tudjuk ezt megtenni. Itt kerül előtérbe a tananyag tartalmának megválasztása (mennyiségi, minőségi kritériumok), az ismeretszerzés optimalizálása, a pedagógusképzés hatékonyságának növelése, a tanulás társadalmi és anyagi elismerése, hogy csak néhányat említsünk a megoldandó feladatok közül.

A fenti hét pontban az általunk legfontosabbnak tartott problémákat soroltuk fel. Valószínűleg még hosszan lehetne sorolni oktató-nevelő munkánk fogyatékosságának okait, de úgy gondoljuk ennyi is elég ahhoz, hogy „hagyományos” oktatásunk – ezen belül a matematikaoktatásunk – megreformálását előtérbe helyezzük. Ez a reform mind a tananyag tartalmában, mind a választott munkaformában, módszerben, eszközben kell, hogy jelentkezzen. Ez a változás kihat a tanár-diák viszonyra, az elsajátítandó ismeretanyag mennyiségére, minőségére, az ellenőrzésére és értékelésére, a motivációra, az oktatási segédanyagok teljes körére, a tankönyvek modernizációjára, és a sort még hosszan lehetne folytatni.

Kulcsszavak

gazdasági, technikai fejlődés

társadalmi változások

tudomány – tananyag

elavult és új tudáselemek az oktatásban

új ismerethordozók

közvetlenül alkalmazható tudás

motiváció

Kérdések, feladatok

1) A Hajdu Sándor szerkesztette matematika tankönyvekből (Műszaki Könyvkiadó, 5. osztálytól 12. osztályig) gyűjtse ki azokat az ismereteket, amelyeket korszerűnek talál, és azokat, amelyeket ön szerint már nem célszerű tanítani! Válaszát indokolja!
2) Melyek azok a témakörök, amelyek a társadalmi változások, igények miatt kerültek a tananyagba?
3) Az interneten keressen olyan programokat, amelyek segítik a korszerű matematikatanítást!

Kötelező irodalom:

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 5-12. osztály számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Ajánlott irodalom:

Csapó Benő: Tudás és Iskola

Műszaki Kiadó, Budapest, 2004

2. A matematikatanítás cél-, feladat- és követelményrendszere

Képességek, jártasságok, készségek fejlesztése a matematikaoktatásban

Olvassa el többször figyelmesen a fejezetet és tanulja meg a szükséges fogalmakat.

Minden országban, mindenfajta társadalmi berendezkedésben döntő kérdés, hogy mire nevel, mit és hogyan tanít az iskola. (Ez még akkor is igaz, ha az utóbbi években erősen érződnek a tanulók nevelésében az iskolán kívüli hatások.) Az oktatás tartalmát, formáját, céljait, követelményeit a társadalom elvárásai határozzák meg – természetesen a pedagógiai és a pszichológiai szempontok figyelembevételével. Az is tudott dolog, hogy bármilyen társadalmi rendszerben, akármilyen követelményeknek megfelelően is tanítunk, de nem céltudatosan, akkor munkánk nagy valószínűséggel eredménytelen lesz.

Nevelni, oktatni, képezni, embereket alakítani, fejleszteni csak az tud, aki tudja, hogy mit kíván elérni tanítványaival, azok milyenné válnak, mivé alakulnak, hogyan formálódnak az oktatási, nevelési, képzési folyamatban. Tehát az oktatás, nevelés, képzés céltudatos tevékenység, mert ha nem ilyen – azaz nem tervezi meg a nevelés folyamatát a pedagógus, nem tűzi ki céljait, – akkor tevékenysége esetleges és nagyon gyakran eredménytelen lesz.

A pedagógus tevékenységének mindig célorientáltnak kell lennie. Ez viszont azt feltételezi, hogy tanórákra és a tanórán kívüli foglalkozásokra rendszeresen és tudatosan készüljön a tanár. Sajnos még így sem biztos, hogy a pedagógus a tervezett célokat – vagy annak egy részét – eléri.

Az itt leírtak függvényében elemezzük, hogy milyen célok, célrendszerek határozzák meg az iskolai és az iskolán kívüli pedagógiai folyamatot.

„A *cél* a működés kiváltója, alapmotívuma, alapja végső értelme. A célnak olyan formában kell megjelennie, hogy a tervezés, az intézkedés és az értékelés alapja legyen." (Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet, Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000)

A tanítási-tanulási folyamatot a **nevelési-oktatási-képzési** hármas célrendszer irányítja. (Ezek szétválasztása nem szerencsés, mert mindegyik feltételezi a másik kettő meglétét.)

Nevelési cél: *A társadalmi beilleszkedéshez, tevékenységhez nélkülözhetetlen pszichés tulajdonságok kialakítása, fejlesztése.*

Oktatási-képzési cél: *konkrét (matematikai) tartalomhoz kapcsolódó pszichikus folyamatok, képződmények és tulajdonságok valamely rendszerének kialakítása, fejlesztése.*

Ezek szerint a matematika tanítása során *élményeket, képzeteket, ismereteket, gondolkodási műveleteket, fogalmakat, értelmi cselekvési terveket, képességeket, készségeket, beállítódásokat, algoritmusokat, kreatív személyiségtulajdonságokat, térszemléletet, kombinatorikus gondolkodásmódot, gyakorlati alkalmazásra való képességet* stb. alakítunk ki tanítványainkban.

Tehát nem az a célunk, hogy a tanulók a definíciókat, tételeket, szabályokat, algoritmusokat pontosan kimondják, a műveleteket pontosan végrehajtsák, (bár ez sem kevés) hanem az, hogy az ismereteik alkalmazásra képesek, aktívak, nyitottak, rendszeresek, mobilizálhatók legyenek. Például azt nem tartjuk értékes ismeretnek, ha a tanulók szépen elmondják az egyenes arányosság definícióját, de amikor a gyakorlatban alkalmazni kellene, (pl. vásárlásnál) már nem tudják ezt megtenni.

A célok megvalósításának fő területei:

a) **A tananyag tartalma**

A feladatok szövegezése, állítások logikai értékének meghatározása, gyakorlati vonatkozások, rendezés, algoritmusok, táblázatok, grafikonok készítése, elemzése, cselekvési tervek végrehajtása, ellenőrzés, önellenőrzés, műveleti sorrendek, problémák megfogalmazása, megoldása, tájékozódás térben és időben stb.

Ez azt jelenti, hogy a tankönyvekben olyan kidolgozott, elemzett mintapéldákkal kell az ismeretek elsajátítását, begyakorlását, és a gyakorlatban való alkalmazását megjeleníteni, hogy a felsorolt célok közül a lehető legtöbb megvalósítható legyen.

b) **A választott munkaforma, módszer, eszköz**

Egyéni munka, önálló munka, csoportmunkában közös tanulói tevékenység, egymás gondolatmenetének követése, kiegészítése, vitakészség, manipulativ tevékenység, tárgyak, eszközök helyes használata stb.

A tanár pedagógiai, pszichológiai és módszertani képzettsége, kultúráltsága, illetve ennek fejlettsége a megoldás kulcsa. Egy igazi tanárnak látnia kell azt, hogy melyik tanítványa képes önálló munkára, melyik nem képes csoportban, tanulópárban dolgozni, ki nem tud részt venni a kooperatív tanulási technikákban, kinek szükséges még eszközhasználat, kinek nem stb.

c) **A tanár személyisége**

Pedagógiai tapintat, türelem, megértés, következetesség, megbízhatóság, pontosság, egyszerűség, egyenlő bánásmód, korrekt értékelés, munkaszeretet, szorgalom, kitartás, nagy tárgyi tudás.

Ide kívánkoznak Pólya Györgynek az 1950-es évek végén papírra vetett gondolatai, amelyben a „Tanárok tízparancsolatát" sorolja fel.

(Pólya György: A problémamegoldás iskolája II. Tankönyvkiadó Budapest, 1968)

1. Érdekeljen szaktárgyad!
2. Ismerd a szaktárgyadat!
3. Tudnod kell a tanulás útjáról azt, hogy a legjobb az az út, amelyet magad fedezel fel.
4. Próbálj olvasni a diákok arcáról: mit várnak, mi nehéz nekik! Képzeld magad a helyükbe!
5. Ne pusztán tárgyi tudást adj tanítványaidnak, hanem fejlesszed gondolkodási képességüket is, szoktasd megfelelő értelmi magatartásra, rendszeres munkára őket!
6. Tanítsd meg őket a találgatásra!
7. Tanítsd meg őket a bizonyításra!
8. Keresd aktuális problémákban azt, ami az elkövetkező problémák megoldásában hasznos lehet – igyekezz feltárni a konkrét helyzet mögött rejlő általános megoldástípust!
9. Ne áruld el egycsapásra minden titkodat – hadd találgassanak a diákok – találjanak ki annyit belőle, amennyit csak képesek!
10. Ne tömjed az anyagot tanítványaidba, hanem ösztönözzed őket értelmes tanulásra!

Ha alaposan végiggondoljuk a felsorolást, a fenti 10 parancsolat (vagy ajánlás) nemcsak a matematikatanárokra vonatkozik, hanem minden más tantárgy oktatójára is. Viszont a matematikatanároknak különösen szem előtt kell tartaniuk Pólya György intelmeit.

Ez a Tízparancsolat egyben azt is igazolja, hogy a kompetenciaalapú matematikaoktatás nem a XXI. Század „felfedezése".

A jó tanár mindig – már Comenius idején is – azt tartotta szem előtt, hogy az adott tananyag tanítása kapcsán tanulóit a lehető legtöbb területen fejlessze: értelmileg, érzelmileg, esztétikailag, pszichomotorosan stb.

A teljesség igénye nélkül felsorolunk néhány olyan célt, amelyet a matematikatanítás során megvalósíthatunk:

1) *Kreatív személyiségtulajdonságok fejlesztése*

(Problémaérzékenység, rugalmasság, hajlékonyság, ötletgazdagság, könnyedség, eredetiség, kidolgozottság, újrafogalmazás, kiterjesztés, transzferálás.)

2) *Gondolkodási műveletek fejlesztése*

(Analízis, szintézis, absztrahálás, konkretizálás, általánosítás, specializálás, összehasonlítás, kiegészítés, rendezés, rendszerezés, analógia, összefüggések feltárása, lényegkiemelés, ítéletalkotás, fogalomalkotás, bizonyítás.)

3) *Ítélőképesség fejlesztése*

(Állítások logikai értékének meghatározása, a megoldás helyes vagy helytelen voltának megállapítása, adatok szükségessége, elégségessége, a felesleges adatok kiszűrése, eredmények életszerűsége.)

4) *Kombinatorikus gondolkodásmód kialakítása, fejlesztése*

(Minden adatot számba vettünk-e, az összes lehetséges és szükséges összefüggést megtaláltuk-e.)

5) *Bizonyítási igény fejlesztése*

(Válaszok indoklása, ok-okozati összefüggések helyes használata, helyes érvelés. Ezáltal válik tudatossá a matematikai – és a társadalmi – tevékenység.)

6) *Algoritmikus gondolkodásmód kialakítása, fejlesztése*

(Optimális cselekvési tervek készítése, a tervek végrehajtása, egyszerűség, célszerűség, pontosság, hatékonyság.)

7) *Térszemlélet kialakítása, fejlesztése*

(Tájékozódás térben és időben, térbeli relációk felismerése, geometriai ismeretek gyakorlatban történő alkalmazása.)

A felsorolást még hosszan lehetne folytatni, de ebből a rövid felsorolásból is érzékletessé válik, hogy a társadalmi beilleszkedésben milyen nagy jelentősége van a matematikatanulásnak. Az is nyilvánvaló, hogy csak a lexikális ismeretek átadása milyen nagy veszélyt rejt magában, milyen óriási hiányosságokat eredményezhet a tanulói személyiség fejlődésében.

A későbbiekben, az egyes kompetenciaterületek tárgyalásakor, részletesen ismertetjük, elemezzük az itt felsorolt nevelési, oktatási, képzési célokat
Tehát amikor a kompetencia-alapú matematikaoktatásunkat tervezzük, úgy kell a tananyag tartalmát összeállítanunk, a munkaformákat, a módszereket, az eszközöket, a tanítási eljárásokat, az ellenőrzési formákat megterveznünk, hogy a korábban említett célok, célrendszerek közül a lehető legtöbbet megvalósítsuk mind a tanórán, mind a tanórán kívül.

Kulcsszavak

célok, célrendszerek

nevelési célok, célrendszerek

oktatási célok, célrendszerek

képzési célok, célrendszerek

a célok teljesítésének fő területei

a jó matematikatanár ismérvei

Kérdések, feladatok:

1) Milyen pszichés tulajdonságokat tudunk kialakítani, fejleszteni a matematika tanítása során?
2) Mi jellemzi a kreatív tanulót?
3) Milyen gondolkodási műveletek szükségesek az eredményes matematikai tevékenységhez?
4) Milyen jellemzői vannak a kombinatorikus gondolkodásnak?
5) Keressen olyan feladatokat a Hajdu-féle matematika tankönyvcsaládban, amivel a térszemléletet lehet fejleszteni!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Pólya György: A problémamegoldás iskolája II.
Tankönyvkiadó Budapest, 1968

Ajánlott irodalom:

Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984

3. Az értékes, érvényes, hasznosítható tudás jellemzői

Műveltség, szakértelem, kompetencia

Tanári kompetenciák, tanulói kompetenciák

Olvassa el figyelmesen a fejezetet, tanulja meg az alapismereteket. Ezeket fogjuk később alkalmazni az ismeretek elsajátítása, illetve a problémák megoldása során.

Csapó Benő: Tudás és iskola című művében olvashatjuk, hogy a tudás rendszerének kialakulásában három alapvető rendszerképző elv érvényesül. Nevezetesen a szakterület, a kultúra és az emberi megismerés pszichológiája. A szervezett tudásban valamilyen mértékben mindhárom szervező elv jelen van, de súlyuk különböző. Ezen rendszerképző elvekhez kapcsolódó területek az értékes, érvényes, hasznosítható tudás területei: *szakértelem, műveltség, kompetencia*.

Szakértelem

Az adott szakterület által meghatározott konkrét ismeretek, készségek és képességek együttese.

A szakértelem magában foglalja a tartalmat, az összefüggéseket, a helyzetet, a környezetet, a körülményeket, a felhasználhatóságot és a témán belüli alkalmazhatóságot.
Fontos jellemzője az azonnali felhasználhatóság, hiszen a szakértő nagyon jól ismeri azokat a szituációkat, amelyekkel tevékenysége során találkozhat.
Hátránya viszont az, hogy nem lehet széles körben alkalmazni (az adott témán kívül) és kevésbé transzferálható. Erősen tartalomfüggő.
Előnye az is, hogy nem kötődik életkorhoz, viszonylag idős korban is bővíthető.
Vannak olyan szakterületek, amelyek pontosan megfeleltethetők egy-egy iskolai tantárgynak. Sajnos iskoláink többségében ezt a szakértelem jellegű tudást közvetítik a tanárok, így a személyiség mindenoldalú fejlesztése csorbát szenved. A tanulóink úgy tanulják a biológiát, a kémiát, a matematikát stb., mintha biológusnak, vegyésznek, vagy matematikusnak képeznénk őket, közben elfeledkezünk az egyéb nevelési lehetőségekről. Ez ellentmond az előző

fejezetben ismertetett Pólya-féle alapelveknek. Viszont a szakértelem kialakítása nélkül értékes, érvényes, hasznosítható tudást sem alakíthatunk ki a tanítványainkban.

Műveltség

A *műveltség* úgynevezett „civil” tudás, ami a hétköznapi életben alkalmazható, mindenki számára kötelező tudást jelent. *Az adott kultúrában meghatározó, felhasználható készségek, képességek, ismeretek összessége.* A műveltség társadalmilag értékes tudás.

Hatásai:

- Hatékonyan segíti az egyén fejlődését.
- Elősegíti a személyes boldogulást.
- Kihat a másokkal való kapcsolattartásra.
- Pozitív hatással van a társadalmi munkamegosztásban való részvételre.

Többnyire emberi alkotásokban, közvetítőkön (könyvek, alkotások, médiumok, személyek) keresztül sajátítható el.

Jellemzői:

- Közepes mértékben tartalomfüggő.
- Bizonyos határok között transzferálható.
- Nagyrészt kijelentő, kinyilatkozó.
- Inkább terjedelmi jellegű.
- Fejlesztése nem kötődik életkorhoz.

A műveltség, a kultúrába való integrálódás, a társadalmi folyamatban való részvétel nagy tárgyi tudást követel, ezért nem lehet ezt az úgynevezett kinyilatkozó tudást másodrangúnak tekinteni. Ez a tárgyi tudás szolgáltatja az alapot egyéniségünk kialakításához, megőrzéséhez, továbbfejlesztéséhez és ez kapcsol össze minket a múlttal és a közösség más tagjaival.

A műveltség és a szakértelem azonos területeken, közel ugyanazon elemekből szerveződik, de míg a szakértelemnél a szakterület szerveződési elvei érvényesülnek, addig a műveltség esetében a társadalmi közeg, a tágabb kultúra a meghatározó. Amíg a szakértelem folyamatos gyakorlás, hasonló kapcsolatokban történő alkalmazás során optimalizálódik, addig a műveltség inkább az elemeknek egy lazább, nem szerves összefüggést feltételező kapcsolatrendszerében alakul ki és fejlődik.

Kompetencia

A kompetencia szó az ismeretek alkalmazási képességét, és az alkalmazáshoz szükséges megfelelő motivációt biztosító attitűdök összességét jelenti, valamint azon ismeretek, képességek, magatartási és viselkedésjegyek összességét, amelyek által a személyiség képes lesz az adott feladat eredményes teljesítésére.

A kompetencia nagyrészt a környezettel való spontán kölcsönhatásban, kölcsönös viszonyban alakul ki. A kompetenciák leginkább *természetes tanulás* során fejlődnek ki. Ez a természetes tanulás – a környezettel való aktív kapcsolat miatt is – könnyed, kevésbé energiaigényes, éppen ezért nagyon hatékony.

Ha viszont nem tudjuk megteremteni a természetes tanulás feltételeit, akkor tanulásunk nehézkes, energiaigényes, kevésbé hatékony, *mesterséges tanulás* lesz. Ez erősen rontja a megfelelő kompetenciák kialakulását.

A kompetenciák kialakulása erősen életkorfüggő. Fiatalabb korban lényegesen hatékonyabban, eredményesebben alakítható ki, mint idősebb korban.

Jellemző még a kompetenciára, hogy kevésbé tartalomfüggő, szélesebb körben alkalmazható, transzferálható, mint a műveltség, vagy a szakértelem.

Kompetenciaalapú oktatáson olyan képességek, jártasságok, készségek kialakítását, fejlesztését értjük, amelyek lehetővé teszik, hogy a külön-külön szerzett és fejlesztett kompetenciák szerves egységbe szerveződjenek, és együtt fejtsék ki hatásukat a problémák megoldásában, a gondolkodásban és az ismeretek gyakorlati alkalmazásában.

A kompetenciaalapú oktatás szoros kapcsolatban van az előző fejezetben taglalt, a nevelési, oktatási, képzési célokat maximálisan figyelembevevő matematikaoktatással.

Ezekből az értelmezésekből az is kiderül, hogy önállóan – csak magában – kompetenciát fejleszteni nem tudunk. Ehhez nélkülözhetetlen valamilyen tartalom (például: matematikai ismeret), és szükséges a környezet (például: iskolai közösség, munkaforma, módszer, eszköz, osztálytárs, tanár, szülő stb.).

Értékes, érvényes, használható tudást akkor szerez a tanuló, ha mindhárom terület – a szakértelem, a műveltség és a kompetencia – egymást feltételezve, kiegészítve harmonikusan fejlődik, ha megszerzi a tanuló a társadalmi beilleszkedéshez, tevékenységhez nélkülözhetetlen ismereteket, ezeket tudja alkalmazni, s közben olyan készségekre, képességekre tesz szert, amelyek alkalmassá teszik őt a társadalmi munkamegosztásban való részvételre.

Az Európai Unió a következő *kulcskompetenciákat* határozta meg:

a) Kommunikáció anyanyelven.
b) Kommunikáció idegen nyelven.
c) Matematikai műveltség és alapkompetenciák természettudományi és technológiai téren.
d) Az információs és kommunikációs technológiák alkalmazásához kapcsolódó készségek és képességek.
e) A tanulni tanuláshoz kapcsolódó készségek és képességek.
f) A személyközi és állampolgári kompetenciákhoz kapcsolódó készségek és képességek.
g) A vállalkozói szellem elmélyítéséhez kapcsolódó készségek és képességek.
h) A kulturális tudatosság kialakulásához kapcsolódó készségek és képességek.

Bár a matematikai kompetencia külön kategóriaként jelentkezik, de a felsorolásból kiderül, hogy sok más területen is meghatározó szerepet játszik a matematika.

Nevezetesen:

– kommunikáció anyanyelven – matematikából értő olvasás
– információs és kommunikációs technológiák – matematikából algoritmikus gondolkodás, a megoldás megtervezése
– a tanuláshoz kapcsolódó készségek – matematikából optimumszámítás, statisztika, kombinatorika, valószínűségszámítás.

A NAT 2007. évi módosítása – az EU ajánlás tükrében – a következő kulcskompetenciákat fogalmazza meg:

a) Anyanyelvi kompetencia.
b) Idegen nyelvi kompetencia.
c) Matematikai kompetencia.
d) Természettudományos kompetencia.
e) Digitális kompetencia.
f) A hatékony és önálló tanulás, mint képesség.

g) Szociális és állampolgári kompetencia.
h) Kezdeményezőkészség és vállalkozási kompetencia.
i) Esztétikai és művészeti tudatosság és kifejezőkészség.

Vegyük észre, hogy az anyanyelvi, a természettudományos, a digitális, az önálló tanulás, a kezdeményezőkészség és az esztétikai kifejezőkészség kompetenciákhoz nélkülözhetetlenek a matematikai kompetenciák.

A fentiekből adódóan célszerű megfogalmaznunk a pedagóguskompetenciákat is.

a) A tanulás tanításának ismerete.
b) Az egyéni képességek és szükségletek figyelembe vétele.
c) Változatos munkaformák, módszerek, eszközök alkalmazása.
d) A tanulók motivációs rendszerének megismerése.
e) A tanulói teljesítmények folyamatos értékelése.
f) Szakmai elkötelezettség.
g) Kommunikativitás.
h) Együttműködési képesség.
i) Pedagógiai tapintat.
j) Pedagógiai, pszichológiai, módszertani kulturáltság.

Ezek szintén összecsengenek a Pólya-féle tanítási-tanulási alapelvekkel.
A kialakítandó, fejlesztendő tanulói kompetenciákat később ismertetjük és elemezzük.

Kulcsszavak

szakértelem
műveltség
kompetencia
tanári, tanulói kompetenciák
természetes tanulás
mesterséges tanulás
célok-célrendszerek és a kompetencia

Kérdések, feladatok:

1) Milyen ismérvei vannak a szakértelemnek?

2) Miért mondjuk, hogy a műveltség „társadalmilag értékes” tudás?
3) Mit jelent az, hogy a kompetencia kialakulása erősen életkorfüggő?
4) Mit értünk természetes tudáson, mit értünk mesterséges tudáson?
5) Sorolja fel az EU-s kulcskompetenciákat!
6) Milyen kulcskompetenciákat határoz meg a NAT?
7) Milyen tanári kompetenciák vannak?

Kötelező irodalom:

1. Csapó Benő: Tudás és iskola
Műszaki Kiadó, Budapest, 2004
2. Nemzeti Alaptanterv
Oktatási Minisztérium, Budapest, 2004

4. Fogalomalkotás, ismeretszerzés a kompetencia-alapú matematikaoktatásban

Olvassa el figyelmesen, majd tanulja meg az alapfogalmakat, ismereteket!

a) A matematikai fogalmak kialakítása, a matematikai ismeretszerzés

A fogalom – jelentését leegyszerűsítve – *gondolati absztrakció*. R.R.Skemp szerint a fogalmaknak két csoportját különböztetjük meg.

Egyszerű fogalmak: azon tapasztalatok, vagy jelenségek adott csoportjának közös tulajdonságait tükröző gondolati absztrakciók, amelyek az ismételten előforduló *érzékszervi, mozgásos tapasztalatok eredményeként* közvetlenül kialakíthatók.

Fölérendelt, vagy magasabb szintű fogalmak: azok a gondolati absztrakciók, amelyek egyéb fogalmakból, azok kapcsolatainak révén alakíthatók ki.

Például egyszerű fogalom a természetes szám, mint véges halmazok számossága, (a 3 olyan halmazok olyan közös tulajdonsága, amelyeknek 3 elemük van), vagy az $\frac{5}{2}$ tört, (mint öt egész fele). Fölérendelt fogalom: az egészek fogalma, a legnagyobb közös osztó fogalma stb.
(Az egész számok előállíthatók két természetes szám különbségeként. A legnagyobb közös osztó minden közös osztónak többszöröse.)

„Saját fogalomrendszert mindenkinek egyedül kell kiépíteni. De a folyamat felgyorsítható, ha a hozzá szükséges anyagok »kéznél vannak«."
(Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája, Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005)

Pólya György ugyanezt a didaktika oldaláról így fogalmazza meg:

„…az absztrakciók fontosak, ragadjunk meg minden eszközt, hogy kézzelfoghatóbbá tegyük őket. Magyarázatunkban segítségünkre lehet bármi – jó vagy rossz, költői vagy profán."
(Pólya György: A gondolkodás iskolája, Akkord Kiadó, Budapest, 2000)

Matematikában – éppen e tudomány jellege miatt – vezető szerepet játszik a definiálás művelete. E gyakoriság miatt érdemes Skemp két hipotézisét idézni, amelyekkel a definíciókat „helyükre" tudjuk tenni a matematikai fogalomalkotásban.

„Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy a megfelelő példák sokaságát nyújtjuk."

„Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal."
(Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája, Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005)

E két alapelv „igazolására" elég, ha az olvasó arra gondol, hogy a sorozatok konvergenciájának, vagy az algebrai struktúrák fogalmának definíciója egészen addig érthetetlen volt számára, míg néhány frappáns, egyszerű példával valaki rá nem „világított" e fogalmak lényegére. Hasonlóan van ez a 10-16 éves korosztály tanítása során is. Az abszolútérték, függvény, művelet stb. fogalmak megfelelő példák nélkül nem alakíthatók ki.

Mikor nevezünk egy példát „megfelelőnek"? Akkor, ha a *fogalom minden lényeges jegyét tartalmazza, de lehetőleg legkevesebb olyan jegyet, amely nem sajátja a fogalomnak.*

Ilyen példát találni lehetetlen, hiszen minden példában egy sor egyéb tulajdonság is megtalálható. Ezért akkor járunk el helyesen, ha több példát mutatunk be, ezek mindegyikében megtalálhatók a fogalomra jellemző jegyek, de a többi tulajdonság csak egy-egy különböző példában.

Így elérhetjük azt, hogy a *lényeges jegyek „megerősödnek”, a lényegtelenek „elhalványulnak”.* Ha a lényegtelen jegyek kiszűrése nem teljes, akkor a fogalom „zajos” lesz. Ez azt jelenti, hogy olyan jegyet is a fogalom sajátjának tud be a tanuló, amire ez nem teljesül. Például 5. évfolyamon többnyire lineáris egyenleteket, egyenlőtlenségeket oldanak meg a tanulók. Arra a kérdésre, hogy mi a különbség a következő két nyitott mondat között:

$$2x + 3 = 5 \qquad\qquad 2x + 3 > 5$$

egy tanuló azt a választ adta:

„Az egyenletnek egy megoldása van, az egyenlőtlenségnek több.”

Ebben az esetben ez igaz, de a később pontosan kialakítandó egyenlet, egyenlőtlenség fogalmaknál komoly problémát okozhat, hiszen nem a megoldások száma az egyenletek, egyenlőtlenségek fő jellemzője.

A fogalmak kialakításánál ajánlatos követni a következő utat:

1. A fogalom kialakításának kezdetén kevés zaj kívánatos. Ez a példák célirányos kiválasztásával elérhető.
2. A fogalom kialakítása után, a vele való dolgozás során folyamatosan növelni kell a zajszintet, hiszen az is célunk, hogy a tanuló képes legyen a lényegest a lényegtelentől megkülönböztetni, képes legyen a szükséges adatokat kiválasztani, azokkal műveleteket végezni, míg a lényegtelen adatokat kiküszöbölni.

   (Valójában ez az értő olvasás velejárója, eredménye.)

Az általános pszichológia a szellemi struktúrákat *szkémáknak* nevezi. A matematikatanításban szkémákon a matematika komplex fogalmi struktúráit, fogalomrendszereit fogjuk érteni.

„Egy szkémának két fő funkciója van: integrálja a méglévő tudást és szellemi eszközként szolgál az új tudás elsajátításához.”

(Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája, Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005)

Ez azt jelenti, hogy amikor egy fogalmat kialakítunk, rögtön célszerű beilleszteni a meglévő fogalmak rendszerébe, illetve a meglévő fogalmak rendszere segítségével tudunk kialakítani új fogalmakat. Például megmutatjuk, hogy a négyzet paralelogramma; a természetes számokat felhasználjuk az egészek, a törtek fogalmának kialakításához. (Pl.: Két természetes szám különbségeként felírható számok az egész számok, két egész hányadosa a racionális szám, ha a nevező nem nulla, stb.)

Az értelmes tanulás feltétele, azaz az értékes, érvényes, hasznosítható tudás megszerzésének feltétele a megértés, amihez szükséges

– az asszimiláció, vagy az
– akkomodáció megléte.

Piaget *asszimiláción* azt érti, hogy egy-egy új fogalom beépül a kialakult szkémába anélkül, hogy azt módosítaná, *akkomodáción* pedig azt, hogy az új fogalom beilleszkedéséhez szükséges a meglévő szkéma módosulása. A matematikatanulásban – de általában a tanulásban is – mindkettő előfordul.

A matematika, mint tudomány és a matematika felhasználása rendkívül gyorsan változik. Mindent megtanítani nem lehet. Helyette inkább:

– segíteni kell tanulóinkat abban, keressék és *megtalálják az alapvető rendszereket,* ebbe be tudják illeszteni az új ismereteket;
– meg kell tanítani őket arra, hogy szkémáikat tudják akkomodálni, azaz legyenek képesek átalakítani rendszereiket az új befogadása érdekében.

Röviden ez annyit jelent, hogy *meg kell tanítani tanulni a tanulókat*.

Kísérletek igazolják, hogy ha az értelem nélküli tanulást (magolást) összehasonlítjuk a szkémaszemlélet szerinti tanulással, akkor az utóbbival tartósabb, alkalmazhatóbb, transzferálhatóbb, bővíthetőbb, könnyen előhívható, tehát „értékesebb" fogalmakat, fogalomrendszereket, ismereteket, ismeretrendszereket alakíthatunk ki.

Erre egy bizonyító értékű példa a következő:
A tanulóknak kétoldalnyi jelrendszert kellett megjegyezniük. Az egyik csoport teljesen képzetlen volt az adott területen, nem láthatott benne rendszert, míg a másik csoport már foglalkozott a megtanulandó ismeretekhez hasonló rendszerekkel, bár számukra is újak voltak ezek az ismeretek. Az eredményeket megdöbbentőeknek nevezhetnénk, de inkább természetesnek kell tekintenünk őket.
A táblázat az eredményeket mutatja:

	Közvetlenül a tanítás után	1 nap múlva	4 hét múlva
Szkéma szerinti tanulás	69 %	69 %	58 %

Értelem nélküli tanulás („magolás”)	32 %	23 %	8 %

Látható, hogy a szkéma szerinti tanulás lényegesen eredményesebb, és hosszabb távon „él”, mint a verbális magolás. Ez megint a tanár tudatos tanítási tevékenységét hangsúlyozza.

Egy konkrét példa a fentiek igazolására. A szerző a doktori disszertációjához a következő kísérletet végezte el.
5. osztályos tanulókkal (akik még az oszthatósággal keveset foglalkoztak), és 6. osztályos tanulókkal (aki már ismerték a prímszámokat, és az összetett számokat) végezte el a kísérletet.

A feladat:
„Felsorolok számokat, amiket le is írhattok, meg is tanulhattok, bármit csinálhattok velük, csak jegyezzétek meg őket! Körülbelül két hét múlva visszajövök, és megnézem, hogy hány számra emlékeztek.”
A számok a következők voltak:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

A kísérlet eredménye fényesen igazolta az előbbi eredményeket. Az 5. osztályos tanulók nagy százaléka mindenfajta számot mondott 1 és 20 között, míg a 6. osztályos tanulók többsége felsorolta a 20-nál kisebb pozitív prímeket. (Esetleg néhányat kihagyva belőlük.)
Ez azt mutatja, hogy mindkét csoport tanulói rendszerben gondolkoznak, de amíg az 5. osztályos tanulóknak a „20-nál kisebb pozitív számok” volt a rendszer (hiszen a másik halmazba történő csoportosításhoz nem volt meg a kellő előképzettségük), addig a 6. osztályosok zöme csak a 20-nál kisebb pozitív prímeket sorolta fel.

Leszűrhetjük azt a tapasztalatot, hogy ha a matematikatanításunk követi a rendszerszemléletet, akkor lényegesen kevesebb – de minőségileg magasabb szintű – ismeretet kell megjegyezni a tanulóknak, míg a rendszerszemlélet nélküli tanulás – éppen az egymástól különálló, köztük kapcsolatot nem találó tanulás miatt – jobban megterheli a memóriát, nem teremt erős ismeretbázist, és nem eredményezi a nyilvánvaló kapcsolatok felismerését, feltárását sem.

A matematikatanár csak úgy tervezheti meg az óráját, hogy abban – akár az asszimiláció, akár az akkomodáció révén történő ismeretszerzés esetén – érvényesüljön a rendszerszemlélet.

b) A matematikai ismeretek

Az ismeret nem azonos a fogalommal, több ennél. Magában foglalja a fogalmakat, a fogalomrendszereket, a velük végzett műveleteket, a szabályokat, tételeket, ezek bizonyítását, az algoritmusokat is. Az ismeretek kialakításának alapja a fogalomalkotás.

A jól kialakított ismeretek jellemzői dr. Nagy Sándor szerint:

1. *Tudományos*

A tudományosság viszonyítottan értendő. Például 5. osztályban a merőleges rajzolás derékszögű vonalzóval „tudományos”, de 7. osztályban már nem az. Olyan pontos ismereteket kell elsajátíttatnunk a tanulókkal, amelyekre – fejlettségükből adódóan – képesek. Középiskolában a függvényvizsgálat grafikon segítségével „tudományos”, leolvassuk a görbe tulajdonságait, ugyanez a felsőoktatásban, amikor már a differenciálszámításon túl vannak a hallgatók, már nem az.

2. *Rendszeres*

Érvényesül az egymásra építettség, kialakul az ismeretek között a kapcsolatok sokaságának rendszere (pl.: Descartes szorzat – relációk – függvények – sorozatok, vagy négyszögek – trapézok – paralelogrammák – rombuszok stb.).

3. *Nyitott*

Bármikor, a vele kapcsolatban lévő ismerettel bővíthető legyen (pl.: természetes számok – egészek – törtek – racionális számok – valós számok).

4. *Aktív*

Bármikor előhívható, felhasználható legyen (pl.: feladatmegoldások – tételek – bizonyítások – alkalmazások).

5. *Életszerűség*

Ne legyen a gyakorlati élettől elrugaszkodott, látsszon társadalmi hasznossága (pl.: szöveges feladatok – algoritmusok – százalékszámítás).

Az óratervezeteknél olyan kidolgozott mintapéldákat, olyan feladatokat kell válogatnunk, hogy az ismeretrendszerek fenti tulajdonságai tükröződjenek bennük.

c) A kompetenciaalapú matematikai ismeretszerzés fázisai (műveletei, lépései)

A fogalomalkotásról és az ismeretszerzésről mondottakat így rendszerezhetjük:

1. *Cselekvés, tapasztalatgyűjtés*

Jellemzője a manipulatív tevékenység, a tudatos vagy esetleges tapasztalatszerzés, ezen tapasztalatok megfogalmazása.

2. *Lényeges fogalmi jegyek kigyűjtése*

A tanár irányításával, a tárgyi tevékenység kapcsán irányított megfigyeléseket folytat a tanuló, ezen tapasztalatok közül a jellemzőket megtartja, a lényegteleneket elveti. Sejtéseket fogalmaz meg. A sejtéseket a tapasztalatok alapján igazolja.

3. *A zajok kiszűrése*

A tanár példákkal és ellenpéldákkal, megfigyelési szempontok adásával tudatosítja a tanulóban, hogy az adott jegyek miért sajátjai az ismeretnek, vagy miért idegenek attól. Szerencsés, ha a tanuló – tanár által adott ellenpéldákkal – saját maga jön rá a tévedésére, és saját magát korrigálja azt.

4. *Egyszerű fogalmak kialakítása*

Az első három fázisnak a színtézise. Már konkrét definíciót, értelmezést is elvárunk a tanulótól. (Pl.: természetes szám, tört, osztó stb.)

5. *Egyszerű fogalmakhoz kapcsolódó ismeretek kialakítása*

Kapcsolatot keresünk a többi egyszerű fogalommal, beillesztjük a fogalmak rendszerébe, műveleteket végzünk velük, algoritmusokat alakítunk ki, stb. (Pl.: műveletek, műveleti sorrendek, közös osztó stb.)

6. *A fölérendelt fogalmak kialakítása*

Megkonstruáljuk az egyszerű fogalmakból alkotható magasabbrendű fogalmakat, feltárjuk ezek rendszerét. (Pl.: racionális szám, egyszerűsítés, bővítés, legnagyobb közös osztó stb.)

7. *A fölérendelt fogalmakhoz kapcsolódó ismeretek kialakítása*

Ugyanazokat a műveleteket végezzük el, mint az 5. pontban csak magasabb szinten. (Pl.: prímtényezős felbontás.)

8. *Kapcsolatépítés a különböző fogalomrendszerek, ismeretrendszerek között*

Megmutatjuk a matematika egyes témaköreinek fogalomrendszerét, majd a különböző fogalomrendszerek közti kapcsolatot tárjuk fel. (Pl.: egyenletek, kombinatorika, valószínűség.)

Ezek az egymást követő fázisok biztosítják a természetes tanulást, és nem kívánják meg az energiaigényes, nehéz mesterséges tanulás folyamatát.

Életkortól, fejlettségtől függően van olyan eset, hogy nem kell az ismeretelsajátítás minden fázisát végigjárnia a tanulónak. Például a középiskola felsőbb osztályaiban a „cselekvés, tapasztalatgyűjtés" nem konkrét tárgyi tevékenységet jelent, hanem kidolgozott mintapéldák algoritmusának reprodukálását. Viszont, ha gondunk van a tanulók fogalomalkotásával, próbáljuk feltárni a hiányosságok okait, nézzük meg, hogy az ismeretszerzés melyik fázisa hiányzik, majd pótoljuk azt, így nagy valószínűséggel a tanuló elsajátítja a szükséges ismereteket.

Ez a pszichológiai megközelítés Piaget interiorizációs elméletére épül. Pólya György ennek didaktikai megközelítését a következőképpen értelmezi: Az ismeretelsajátítás nem más, mint tanítási-tanulási folyamat. A legjobb tanítás elve egyben a legjobb tanulás elve is.

A Pólya-féle tanítási-tanulási alapelvek:

1. *Aktív tanulás elve*

A tanuló ne legyen passzív befogadó. A tanulás legjobb útja, módja a felfedezés. A tanár egyik legfontosabb feladata, hogy segítsen tanítványainak a felfedezésben. Ez szoros kapcsolatban van a skempi értelmezés első három fázisával.

2. *A motiváltság elve*

A tanulót rá kell bírni arra, hogy akarja az ismeretet megszerezni. A tanár feladata, hogy belső késztetést alakítson ki tanítványaiban, s ne külső (büntető) motiváció hatására tanuljon a tanuló. Ehhez kell az életkornak megfelelő feladatszövegezés, tartalom, a változatos munkaforma, módszer, eszköz és a megfelelő tanári személyiség. A motiváltság a skempi értelmezés minden fázisához nélkülözhetetlen.

3. *Egymást követő fázisok elve*

„A tanulás tevékenységgel és észleléssel kezdődik, ebből szavakba és fogalmakba megy át, és végül a helyes gondolkodásmódhoz vezet."

(Pólya György: A gondolkodás iskolája, Akkord Kiadó, Budapest, 2000)

Ez két vizsgálati szempontot is jelent. Egyrészt a tananyag belső struktúráját, másrészt a gondolkodás kialakulásának folyamatát mutatja.

A kétféle vizsgálat egyazon folyamat – nevezetesen az ismeretelsajátítás – két oldalát vetíti elénk. A tanítási-tanulási folyamat tervezésénél akkor járunk el helyesen, ha mindkettőt figyelembe vesszük tervező munkánknál.

Kulcsszavak

egyszerű fogalmak

magasabb rendű fogalmak

fogalmi jegyek

zaj

asszimiláció

akkomodáció

a matematikai ismeretek ismérvei

az ismeretszerzés fázisai

tanítási – tanulási alapelvek

Kérdések, feladatok:

1) Elemezze a matematikai fogalomalkotással kapcsolatos skempi hipotéziseket!
2) Kövesse végig a Hajdu-féle tankönyvcsaládban a függvény fogalmának kialakítását az ismeretszerzés fázisainak tükrében (5-12. osztály)!
3) Keressen az általános iskolai és középiskolai tankönyvekben egyszerű és ezekből létrehozott magasabbrendű fogalmakat, ismereteket különböző témakörökben!
4) Elemezze egy konkrét témakör feldolgozását (a Hajdu-féle tankönyvcsalád 5-12. osztály tankönyvei alapján) a Pólya-féle tanítási-tanulási alapelvek tükrében!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
   Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 5-12. osztály számára
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010
3. Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája
   Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005

Ajánlott irodalom:

Pólya György: A gondolkodás iskolája
Akkord Kiadó, Budapest, 2000

Pólya György: A problémamegoldás iskolája
Tankönyvkiadó, Budapest, 1968

Dr. Nagy Sándor: Didaktika
Tankönyvkiadó, Budapest, 1969

5. Képességek, jártasságok, készségek kialakítása a kompetenciaalapú matematikaoktatásban

Figyelmesen olvassa el az elméleti áttekintést, tanulja meg a szükséges alapfogalmakat!

Mint a korábban írtakból kiderül matematikát nem a matematikai ismeretek verbális elsajátítása miatt tanítunk, sőt. A matematikatanulás során a tanuló nagyon sok területen fejlődik, s fokozatosan válik alkalmassá a társadalmi beilleszkedésre.

A kompetencia – leegyszerűsítve – **képességek, jártasságok, készségek** olyan rendszere, amely képessé teszi az embert a problémamegoldó gondolkodásra, a gyakorlatban alkalmazható ismeretek szerzésére, ezek kombinatív felhasználására.
Vizsgáljuk meg, hogy mit értünk képességen, jártasságon, készségen, hogyan fejleszthetők és hogyan mérhetők ezek a pszichés tulajdonságok.

Képességek

Képességen a cselekvéseink eredményes végrehajtásának belső feltételeit értjük. A képességek megléte, fejlettsége csak közvetve mérhető az egyén megnyilvánulásából. Vannak olyan képességek, amelyek a *megismerési folyamatban* szerveződnek, vannak olyanok, amelyek a *társas kapcsolatokban* szerveződnek, és olyanok, amelyek *cselekvésben* szerveződnek. Mindhárom terület nagyon fontos a kompetenciák kialakulásában.

A képességek kialakulásának feltételei: az adottság és a rátermettség. Az adottságot a genetikai program determinálja, a rátermettség, pedig az adottságok sora.
A megismerési folyamatban szerveződő képesség a tanulás alapja (lásd: szakértelem, műveltség), a társas kapcsolatokban szerveződő képesség a kommunikáció, az alkalmazkodás,

a társadalmi beilleszkedés alapja, míg a cselekvésben szerveződő képesség az ismeretszerzéshez, az ismeretek alkalmazásához nélkülözhetetlen.

A kompetenciaalapú oktatás megtervezésekor olyan feladatanyagot, olyan módszereket, munkaformákat, eszközöket kell összeválogatnunk, hogy a fenti alapelvek maradéktalanul érvényesüljenek.

Ennek igazolására vizsgáljuk meg, hogy az egyes területekhez milyen kompetenciák tartoznak.

A megismerési folyamatban szerveződő képességekhez tartozó kompetenciák:

- megfigyelőképesség (érzékelés, észlelés folyamata)
- a gyors bevésés, a tartós megőrzés, a pontos felidézés képessége (az emlékezés folyamata)
- a képzelőerő, a fantázia képessége (a képzelet folyamata)
- lényegkiemelés, problémamegoldó képesség, rendszerező képesség, összefüggések meglátásának képessége, műveleti képesség, kreatív képességek (a gondolkodás folyamata).

A társas kapcsolatokban szerveződő képességekhez tartozó kompetenciák:

- kapcsolatteremtő
- kapcsolatfenntartó
- kapcsolatmegszakító
- kommunikációs (közlő, befogadó)
- empátia.

A cselekvésben szerveződő képességekhez tartozó kompetenciák:

- ügyesség
- állóképesség
- gyorsaság.

Jártasság

A jártasság új feladatok, problémák megoldása a meglévő ismeretek alkotó, kombinatív felhasználása révén.

A jártasság közvetlen megfigyeléssel mérhető, amelynek formái: a tevékenység vizsgálata, mérőlap, teszt értékelése, riport elemzése stb. Hogy a tanulásban bizonyos matematikai tevékenységi körben jártasság alakuljon ki, annak az a feltétele, hogy jól megértett, elsajátított ismeretrendszerrel rendelkezzen a tanuló.

Fontos, hogy a fogalmakat, ismereteket ne önálló objektumokként kezelje, hanem fedezze fel a köztük lévő összefüggéseket, helyezze el az adott ismeretet az adott témakör ismeretrendszerében. Ehhez a rendszerszemlélethez viszont nélkülözhetetlen a gondolkodási műveletek végzésére való képesség, és azoknak kombinatív kapcsolása.

A gondolkodási műveletek hiánya, vagy fejletlensége eredményezheti az úgynevezett verbális, értelem nélküli tanulást („magolást"), aminek eredménytelensége mindenki előtt ismert. Például ilyenkor fordul elő az, hogy a tanuló a kémiai keveréses feladatok, vagy a fizikai mozgásos feladatok megoldásakor nem kapcsolja ismereteit a matematikában erősen begyakorolt arányossági számításokhoz.

Ha a jártasság az adott műveletben nem alakul ki a tanulóban, még az a veszély is fenyegeti, hogy ismereteit rövid időn belül elfelejti, viszont oktatási munkánk hatékonyságát erősen megkérdőjelezi.

Készség

A matematikai készség, a tudatos matematikai tevékenység automatizált komponense. Itt hangsúlyozzuk a *tudatos* tevékenységet.

Egy példával illusztrálva ez azt jelenti, hogy a törttel való osztást minden nehézség nélkül elvégzi a tanuló, (tudja, hogy az osztó reciprokával szorzunk), és ha rákérdezünk, hogy miért, tudja indokolni, értelmezni a szabályt. Tehát csak szükség esetén idézi fel magában az értelmezést. Ha viszont csak a műveleteket végzi el, de indoklást, magyarázatot nem tud adni, akkor ez a tevékenység már nem nevezhető tudatosnak, így a készség fenti definíciója nem is érvényes tudás.

A készség kialakulásának feltétele az ismeretek sokszori, többirányú, különböző összefüggésekben jelentkező alkalmazása. Ez a folyamat a *gyakorlás.* Tehát gyakorlás nélkül készségeket kialakítani nem lehetséges.

(Egyébként ugyanez igaz a jártasságra és a képességre is. Ezekhez is elengedhetetlen a gyakorlás.)

A készség elsajátításának szakaszai:

- a részműveletek megtanulása
- a részműveletek egyesítése simán gördülő cselekvés-egésszé
- a fölösleges mozdulatok, mozzanatok és erőkifejtések kiküszöbölése

– a külső érzékeléssel való ellenőrzés csökkentése
– a műveletek különböző változatainak elsajátítása, különböző megoldási módok keresése, ezek azonosságának megmutatása.

A matematikai ismeretelsajátításban, problémamegoldásban szépen megmutathatók ezek a szakaszok.
Például: oldjuk meg a következő törtes egyenletet!

$$\frac{x}{5}-\frac{2x-1}{6}+3=\frac{5}{2}x$$

Ha a tanuló ismeretei készségszintűek, akkor egyszerűen szorozza az egyenlet mindkét oldalát 30-cal, amivel olyan egyszerű alakra hozza az egyenletet, hogy a megoldása nem okoz problémát.
Ha viszont a tanulók ismeretei az adott területen nem készségszintűek, akkor jönnek a részműveletek: legkisebb közös többszörös megkeresése, közös nevezőre hozás, törtek szorzása egésszel, egynemű kifejezések összevonása, az egyenlet megoldása.
Sok gyakorlás után ezeket a részműveleteket gondolatban egyesíti a tanuló (két-három lépést egy lépésben végez el), kiküszöböli a felesleges megoldási lépéseket és ugyanoda jut, mint az előbb említett esetben. Röviden, készségszinten tudja megoldani az egyenletet.

Az itt leírtak ismételten arra mutatnak rá, hogy csak lexikális ismeretek nyújtásával a tanulói kompetenciák nem fejleszthetők, a fejlesztéshez mindenoldalú, alapos, átgondolt tervező munka szükséges a pedagógus részéről.

Kulcsszavak

képességek
a képességek szerveződési területei
jártasság
készség
maximális begyakorlottság
a készségek kialakulásának folyamata

Kérdések, feladatok:

1) Soroljon fel olyan képességeket, amelyek a matematikatanuláshoz nélkülözhetetlenek!
2) Keressen a Hajdu-féle tankönyvcsalád 5-12. osztályában olyan példa- és feladatsorozatokat, amelyekkel ki tud alakítani jártasságot egyes matematikai témakörökben!
3) Tervezzen, vagy keressen a Hajdu-féle tankönyvcsaládban olyan feladatsorozatot, amellyel a számolási készséget ki tudja alakítani!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 5-12. osztály számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2007
2. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000

Ajánlott irodalom:

Nagy József: A rendszerezési képesség kialakulása
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1987

6. A tanulói kompetenciák fejlesztésének lehetőségei a matematikaoktatásban

A következőkben azokat a kompetencia-területeket elemezzük, amelyek nagymértékben fejleszthetők a matematikatanítás során, és megmutatjuk azokat a lehetőségeket, tevékenységi formákat, amelyek során ezek a képességek, készségek, jártasságok kialakulhatnak, fejlődhetnek.

Az alábbiakban a matematikatanítás során kialakítandó és fejlesztendő egy-egy tanulói kompetenciát elemezzünk egy-egy feladaton keresztül. Ez nem azt jelenti, hogy egy feladattal csak egy kompetenciát fejleszthetünk, sőt. Elképzelhető olyan feladat is, vagy olyan ismeretszerzési folyamat, hogy 8-10 tanulói kompetencia is fejleszthető vele.

Az egyenkénti – elszigetelt – tárgyalásmód a jobb megértést segíti.

A feldolgozás módja:

– értelmezzük, definiáljuk az adott kompetenciát
– meghatározzuk a mérési, fejlesztési lehetőségeket

– megmutatjuk, hogy mely területek, milyen mértékben segítik a kompetenciák kialakulását.

Ez utóbbinál gondolunk a *tananyag tartalmi vonatkozására, a megfelelő szövegezésre,* az ajánlott *munkaformára, módszerre, eszközre,* a megfelelő *tanári személyiségre,* az ellenőrzés, értékelés megfelelő módjaira, az optimális motivációra.

I. Értő olvasásra való képesség

Az értelmes, elemző olvasás (röviden értő olvasás) a mindennapi élet szükségszerűsége. Nem azonos a folyamatos, nem akadozó, szépen hangsúlyozott olvasással. *Akkor mondjuk, hogy az egyén értelmesen, elemzően, azaz értőn olvas, ha az elolvasott szöveg lényegét kiemelve, lényegtelen jegyeit elvetve vissza tudja adni a szöveg tartalmát.*

Az értő olvasás a feltétele a társadalomban való eligazodásnak, a tájékozódásnak, a kommunikációnak, a gyakorlati cselekvésnek, a jelrendszer megértésének és e szerint való tevékenységnek. Elég csak egy termék használati utasítására gondolnunk, vagy egy bútor összeszerelési útmutatójára, nem is beszélve a vegyszerek, tisztítószerek, permetszerek felhasználási javaslatáról, illetve a veszélyekre való figyelmeztetésről.

Az értő olvasás nélkül az egyén csak passzív polgára – beletörődő, elfogadó, követő – lehet a társadalomnak.

Felmérések sokasága mutatja, hogy a tanulók nagy százaléka az általános iskolából úgy kerül ki, hogy funkcionális analfabéta, azaz nem érti azt, amit olvas. Sajnos a középiskolai tanulók esetében sem túl jó a helyzet. A szakiskolákban még rosszabb eredményeket tapasztalunk, mint az általános iskola felső tagozatán. A gimnáziumok, illetve szakközépiskolák tanulóinál is nagy hiányosságok vannak ezen a területen. Az értő olvasás hiánya, vagy alacsony fejlettségi szintje, pedig azt eredményezi, hogy a tanuló nem tud eligazodni a társadalomban, nem tud kommunikálni, csökkennek a munkavállalási feltételei, és a felsorolást még hosszan lehetne folytatni. E képesség hiánya, vagy gyenge volta okozza azt is, hogy nem tud értelmesen tanulni a diák, nem érti az összefüggéseket, nem látja a lényeget és ennek közvetlen velejárója az értelem nélküli verbális tanulás, a magolás. (Ez is csak akkor, ha kellően motivált a tanuló.)

Az értelem nélküli tanulás olyan ismeretek szerzését jelenti, amely ismeretek nem aktívak, nem rendszeresek, és főleg nem tartósak. A transzfer pedig végképpen nem jellemző az értelmes, értő olvasás nélkül szerzett ismeretekre.

Bármennyire is olvasási képességről, készségről beszélünk, ennek fejlesztése nem lehet kizárólag az anyanyelvi nevelés feladata, Az értő, értelmes, elemző olvasás képessége nem csak anyanyelvi kompetencia. Minden tantárgynak óriási a szerepe, és ebből adódóan a felelőssége is az értő olvasás készségének fejlesztésében.

A matematika tantárgy különösen fontos szerepet tölthet (és tölt is) be ezen készség fejlesztésében. A korábbi fejezetek elméleti fejtegetései azt mutatják, hogy minden korosztálynál más és más értelmezendő szöveggel, más munkaformával, módszerrel, eszközzel, és más motivációval kell dolgoznunk, hogy munkánk hatékonysága optimális legyen.

Egyes korosztályoknál a tevékenységben, cselekvésben szerveződő képességek a fontosak, más korosztályoknál a társas kapcsolatokban szerveződő képességek a dominánsak, míg megint más csoportoknál a megismerési folyamatban szerveződő képességek a meghatározók. Az is nyilvánvaló, hogy alacsonyabb korosztályoknál a meseszerű szövegkörnyezet, és a pedagógus személyisége adja a motivációt, míg a középiskolai korosztálynál inkább az ismeretelméleti oldal, a tudományos érdekességek, a meghökkentő, elgondolkodtató tézisek, és az ezekből adódó viták, érvelések motiválnak leginkább.

Minden korosztálynál döntő viszont a *tanulók érdeklődési köre.* Ha a tanulót őt nem érdeklő szöveggel próbáljuk értelmes olvasásra nevelni, munkánk kudarcra van ítélve.

Már első osztálytól kezdve törekednünk kell arra, hogy ez a képesség prioritást élvezzen oktató-nevelő munkánkban.

Az értő olvasás leginkább szöveges feladatokon keresztül fejleszthető. Mivel nincs a matematikában olyan témakör, amelyben ne lenne szöveges feladat, így az is elmondható, hogy az értelmes, elemző olvasásra való képesség minden témakör tanításánál kialakítható, fejleszthető.

A következőkben végigkísérjük alsó tagozattól a középiskoláig az értő olvasás fejlesztési lehetőségeit. Feladatok elemzésén keresztül nyomon követhetjük, hogy melyik korosztálynak milyen szövegkörnyezetet, milyen motiváló szövegeket ajánlunk, és ezen feladatok megoldásának milyen módszerei alkalmasak ennek a kompetenciának a fejlesztésére. Mindezeket úgy, hogy a matematika minden témaköréből hozunk példákat.

Néhány példa a fejlesztési lehetőségekre:

1) „A nagypapánál 3 zsák gabonát láttak a gyerekek.
   Gábor szerint az 1. zsák búza, a 2. zsák rozs.
   Hilda szerint a 2. zsák árpa, a 3. zsák búza.
   Imre szerint az 1. zsák búza, a 3. zsák árpa.
   Milyen gabonaféle volt az egyes zsákokban, ha az egyiket mindegyikük eltalálta, de a másikat mindegyikük eltévesztette?”
   (Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 4. 178/9.)

A feladat megértését segíti egy jó táblázat elkészítése, ami a tanulók állításait foglalja magában.

	1.	2.	3.
G	B	R	
H		Á	B
I	B		Á

A táblázat kitöltése nem okozhat gondot a tanulóknak, hiszen csak a szövegben lévő állításokat kell megfelelően elhelyezni benne.
Az elemzés, azaz a feladat értelmezése már több problémát jelenthet. Ilyenkor hajlamosak a tanulók a találgatásra, ami sokszor eredményezhet rossz megoldást, hiszen lényeges jegyeket kihagyhatnak, és lényegteleneket beemelhetnek az összefüggések megkeresésébe.
Úgy kell a tanulókat kérdésekkel irányítani, hogy az állítások összevetése kapcsán az ellentmondások felszínre kerüljenek.

– Tegyük fel, hogy Gábor és Imre 1. állítása hamis.
  Mi lehet akkor a másik két zsákban?
  Imre szerint a 3.-ban árpa, Gábor szerint a 2.-ban rozs. (Hiszen ez az állításunk már igaz.)
  Így viszont a búzát nem tudjuk egyik zsákba sem elhelyezni, tehát zsákutcába jutottunk. Az ilyen zsákutcák tanulmányozása nagyon elmecsiszoló, és jelentősen fejleszti az értő olvasást.

– Tegyük fel, hogy Gábor és Imre eltalálta, hogy búza van az 1. zsákban.

Kérdések:

– Mi nem lehet ekkor a másik két zsákban?

– Mi lehet ekkor a másik két zsákban?

Válasz:

A 3. zsákban biztosan nincs árpa, hiszen Imre igazat mondott az 1. zsákra. Ebből következik, hogy csak a 2. zsákban lehet árpa.

Innen adódik a megoldás:

1. B; 2. Á; 3. R

Az értő olvasást itt, mint *cselekvésben szerveződő képességet* fejleszthetjük, de az állítások igaz, hamis voltának eldöntése, a logikai értékek összehasonlítása, majd ezek rendezése a *megismerésben szerveződő képességet* feltételezi.

A táblázat készítése, a feladat lejátszása, párokban, csoportokban történő foglalkoztatás, a megfelelő tanári kérdéskultúra mind szükséges ahhoz, hogy ebben a korban az értő olvasás képességét a megfelelő szintre hozzuk.

2) „Vizsgáld meg, hogy az adatok mindegyike szükséges-e a megoldáshoz! Hiányzik-e adat? Szükség esetén készíts rajzot, táblázatot!
Az udvarban hosszú láncra ki van kötve egy hamis kutya. Bemehet-e egy kislány a házba a kutyaharapás veszélye nélkül, ha a kutyaól és a kapu távolsága 10 m?"
(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 5. osztály B1.23.)

Az első, amit észreveszünk, hogy nem direkt műveletre utaló a feladat, hanem szövegértelmezésre. Milyen adatokat találunk a feladatban, melyik adat szükséges a megoldáshoz, van-e olyan adat, amit nem használunk fel stb.? Egy rajz elkészítése sokat segíthet a megértésben. Egy jó ábrából, vagy egy helyes értelmezésből rögtön kiderül, hogy nem megoldható a feladat, mert nem ismerjük a lánc hosszát.

A feladat megoldásához javasoljuk a frontális munkát, mint munkaformát és a tanár-diák párbeszédet, mint módszert. Ha a tanulók el is játsszák a történést, megjelenítik mozgással a feladatot, akkor a megértés még könnyebbé tehető.

Sok olyan szöveges feladatot kell adnunk tanítványainknak, amelyeknek nem kérjük a teljes megoldását, hanem csak a szükséges és felesleges adatok kigyűjtését, az adatok közti összefüggések feltárását, a szövegnek megfelelő rajz, ábra, táblázat készítését és a megoldási tervet.

Lehetőleg a legkevesebbet közöljük, és a legtöbbet kérdezzük a megoldással kapcsolatban. A jó tanári kérdések elengedhetetlenek az értő olvasás kialakításához.

Néhány ilyen kérdés:

- Mikor nem harapja meg a kutya a kislányt?
- Milyen hosszú lehet a lánc, hogy a kutya ne érje el a kislányt?
- Adott-e a lánc hossza?
- Milyen adat szükséges ahhoz, hogy válaszolhassunk a kérdésre?

A tanulók többségénél az is az értő olvasás hiányát mutatja, hogy konkrét megoldást akarnak adni a feladatra (például megadni a lánc hosszát), holott a kérdés az adatok szükséges és elégséges, illetve felesleges voltára vonatkozik.

A tanárnak már a szöveg elolvasása előtt fel kell hívni a figyelmet arra, hogy mi a kérdés, és csak az arra adott választ fogadja el a megoldás után.

3) „A folyóba két cölöpöt vertek le. Az egyikből 1,26 m, a másikból 0,72 m látszik ki a víz fölött.

   a) Mennyi a különbség a cölöpök víz feletti magassága között?
   b) Mennyi lesz a különbség a cölöpök víz feletti magassága között, ha a folyó vízszintje 0,60 m-t emelkedik?
   c) Mennyi lesz a különbség a cölöpök víz feletti magassága között, ha a folyó vízszintje 0,72 m-t süllyed?”

(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 6. osztály 1.115.)

Az ilyen típusú feladatokkal is jól lehet fejleszteni az értő olvasást. Könnyen lerajzolható, ezáltal értelmezhető a feladat. Játékos formában tudjuk a tanulóval felfedeztetni azt a nem könnyű ismeretet, hogy a különbség nem változik, ha a kisebbítendőt és a kivonandót ugyanannyival változtatjuk.

$$1{,}26 - 0{,}72 = (1{,}26 - 0{,}6) - (0{,}72 - 0{,}6) = (1{,}26 + 0{,}72) - (0{,}72 + 0{,}72)$$

A szövegelemzésből, a rajzból az is kiderül, hogy ha csökken a vízszint, akkor hosszabb lesz az egyes oszlopok víz feletti magassága, ha nő a vízszint, akkor kevesebb. (Fordított szövegezésű feladat. A növekedés, növekedést sugall, a csökkenés csökkenést.)
Azt is érdemes ilyenkor megkérdezni, hogy vajon akkor is ennyi a különbség, ha például 80 cm-t emelkedik a víz szintje. (Ebben az az érdekes, hogy matematikailag a különbség nem változik, de a gyakorlatban nyilván csökken a különbség.)

Ennél a feladatnál is azt hangsúlyozzuk, hogy nem receptet kell adni a probléma megoldására, nem eljárást kell közölni a tanulóval, hanem alapos elemző munkával olyan gondolkodási képességeket kell tanulóinkban kialakítani, amelyeket mind a matematika, mind a gyakorlati élet más területén is használhatnak.

4) „Egy háromszög leghosszabb oldala 5 cm-rel kisebb, mint a legrövidebb oldal kétszerese, a harmadik oldala 0,5 cm-rel nagyobb a legrövidebb oldalnál.
Mekkorák a háromszög oldalai, ha a kerülete 2 cm-rel hosszabb a legrövidebb oldal háromszorosánál?”
(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 7. B 15 / a))

Ez a feladat 7. osztályos tanuló számára bonyolult és nehéz. Nem is javasoljuk a megoldását a gyengébb képességű, képzettségű tanulók számára, sőt a jobb képességű tanulók is sok segítséget igényelnek a pontos megoldáshoz.
Az értő olvasás nehézségei ebben a feladatban úgynevezett fordítási nehézségek. A tanulóknak a köznapi nyelvet kell lefordítani a matematika nyelvére. Ehhez adunk segítséget egy lehetséges tanári kérdéssorral. Itt a kommunikáció segít a megértésben.

– Mire következtethetünk abból, hogy a szövegben szerepel a „leghosszabb” és a „legrövidebb” oldal?
Válasz: az oldalak különbözők, és sorba rendezhetők.

$$a < b < c$$

– Hogyan írhatjuk fel a leghosszabb és a legrövidebb oldal közti összefüggést?
Válasz: $c \underset{5}{<} 2a$ azaz $c + 5 = 2a$

Vegyük észre, hogy az „5 cm-rel kisebb” szöveg kivonást sugall (jellemző típushiba), holott ha egy szakasz 5 cm-rel kisebb egy másiknál, akkor azt 5 cm-rel növelni kell, hogy egyenlőek legyenek.

– Hogyan írható fel a háromszög kerülete?

Válasz: $K = a + b + c$

(Az oldalak hosszának összege.)

– Hogyan írható fel a kerület és a legrövidebb oldal közti kapcsolat?

Válasz: $K \underset{2}{>} 3\,a$ azaz $K - 2 = 3\,a$

A megértést nehezítő probléma ugyanaz, mint a b) esetben, csak itt a „2 cm – rel hosszabb” hozzáadást sugall.

– Még milyen adatokat nem vettünk figyelembe?

Mit mondhatunk a középső oldal hosszáról?

Válasz: $b \underset{0,5}{>} a$ azaz $b - 0{,}5 = a$

– Írjuk fel a kerületet kétféleképpen és tegyük őket egyenlővé!

Válasz: $K = 3\,a + 2$ $K = a + b + c = a + b + 2\,a - 5$

Ebből: $3\,a + 2 = 3\,a + b - 5$

Innen már könnyen megoldható az egyenlet. Belátható, hogy a feladat megoldásának nehézsége adódhat a matematikai ismeretek hiányából éppúgy, mint abból, hogy lényeges jegyek kiemelését, és a köztük lévő összefüggések feltárását a tanulók nem tudják elvégezni.
Ilyenkor lépésről lépésre, szóról, szóra, sorról, sorra végig kell elemezni a szöveget – akár többször is.
Egy jó rajz és megfelelő kérdéskultúra sokat segít a tanulóknak a probléma megértésében.

5) „Egy 400 méter hosszú, kör alakú futópályán ugyanazon helyről egy irányba, egyszerre indul két futó. Az egyik sebessége 5 $\frac{m}{s}$, a másiké 4 $\frac{m}{s}$.

Mennyi idő múlva „körözi le” a gyorsabb futó a lassúbbat?

Hány perc múlva lesz a gyorsabb futónak két kör előnye?”

(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 9. B 60.g))

Az értő olvasást, a feladat értelmezését segíti egy jó rajz készítése. Az ábra felrajzolása után a következő – az elemzést segítő – kérdések adódnak:

– Mit jelent az, hogy egyszerre indulnak, majd találkoznak?
  Válasz: azonos ideig haladnak.

– Mit jelent a lekörözés?
  Válasz: a gyorsabb 400 m-rel több utat tesz meg, mint a lassúbb.

– A fenti kér kérdésre adott válaszok alapján milyen összefüggés írható le a két futó mozgásáról?
  Válasz: $5t - 4t = 400$
  Majd kérjük ennek az egyenletnek az indoklását.
  (A két futó által megtett út különbsége éppen 400 m.)

Innen az egyenlet megoldása után már könnyen megválaszolható minden kérdés.

Egy másik megoldási mód az értő olvasás magasabb szintjét mutatja.

Ha az egyik futó 5 m-t tesz meg 1 *s* alatt, a másik pedig 4 m-t, akkor 1 *s* alatt a gyorsabb 1 m-rel több utat tesz meg. Ha 1 m különbséghez 1 *s* szükséges, akkor 400 m különbséghez 400 *s*.

Ezzel azt is igazoljuk, hogy minél fejlettebb a tanuló olvasási képessége, annál inkább képes többféle megoldást találni, illetve annál inkább képes munkáját leegyszerűsíteni.

Összefoglalva:
Az értelmes, elemző olvasás nem az ember veleszületett képessége. Ezt kemény, következetes, türelmes munkával kell a tanárnak kialakítani tanítványaiban. Ehhez viszont jó kérdéskultúrára, jó módszertani kulturáltságra, és nem utolsó sorban nagy szakmai tudásra van szüksége.
Ha ez megvan a tanárban, akkor ezzel még a tanulói türelmetlenséget, illetve a kitartás, és a motiváltság hiányát is kiküszöbölhetjük.

Kulcsszavak

megismerésben szerveződő képességek

tevékenységben, cselekvésben szerveződő képességek

társas kapcsolatokban szerveződő képességek

a megértést segítő tényezők

életkori sajátosságok

tanári kérdéskultúra

Kérdések, feladatok:

1) Mit értünk értő olvasáson? Sorolja fel a jellemzőit!

2) Keressen a köznapi életből olyan szövegeket, amelyek az értelmes, elemző olvasás készségét feltételezik!

3) Nyíregyházáról Pécsre akar utazni vonaton. A vasúti menetrend tanulmányozásával tervezze meg a legrövidebb ideig tartó oda-vissza utat!
Ugyanezt terveztesse meg tanítványaival is!

4) Az egyes korosztályoknál milyen területek szerveződési folyamata az értő olvasás kialakulásának folyamata?

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Faragó László: Szöveges feladatok megoldása egyenlettel
Tankönyvkiadó, Budapest, 1969
3. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010
4. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika programok 5-8. o.
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2008

Ajánlott irodalom:

Pólya György: A gondolkodás iskolája
Akkord Kiadó, Budapest, 2000

Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1968

Varga Tamás: Dienes Professzor Játékai

Műszaki Kiadó, Budapest, 1989

II. Problémamegoldásra való képesség

Ha feltesszük a kérdést, hogy miért tanítunk, tanulunk matematikát, akkor első válaszként rögtön a problémamegoldásra való képesség jut eszünkbe. És valóban így van. Mint már korábban is írtuk, nem sokat érünk tanulóink azon ismereteivel, amelyek csak a definíciók, tételek pontos elmondásában jelentkeznek, de amint egy feladat megoldásában alkalmazni kellene ezen ismereteket, azaz egy probléma a megoldásához kellene előhívni azokat, akkor ez már „megoldhatatlan problémát" jelent a tanulóknak

A matematikai gondolkodásnak két alapvető funkciója van: a **megértés** és a **problémamegoldás.**

A megértés alapja – az előző pontban taglalt – értő olvasás, ami nagyon sok gondolkodási művelet meglétét feltételezi. (Lásd: A matematikatanítás cél-, feladat- és követelményrendszere című fejezetet.)

A problémamegoldásra való képességhez egy sor egyéb pszichés tulajdonság megléte szükséges. Nevezetesen: kreativitás, összefüggések meglátása, ítélőképesség, bizonyításra való képesség, transzfer (azaz az ismeretek más területen való alkalmazása), kombinatorikus gondolkodásra való alkalmasság stb.

Ezekből a felsorolásokból is látható, hogy mind a megértés, mind a problémamegoldás nagyon nehéz gondolkodási folyamat, ami nélkül sem matematikai, sem egyéb társadalmi tevékenység nem képzelhető el. Ráadásul ez a két komponens nem is választható el egymástól, hiszen sokszor már a megértés is problémát jelent a tanulónak, amit meg kell oldani a megértéshez, míg megértés nélkül nem képzelhető el problémamegoldás.

Pólya György szerint *a problémamegoldás eddig nem ismert, új feladatok megoldása, hipotézisek felállítása, új megoldásmódok kipróbálása, törvényszerűségek felfedezése.*

Kürti Jarmila így definiálja a problémát: *Az ember számára probléma lehet mindaz, amiben nem bizonyos, de amiről legalább annyi ismerettel rendelkezik, hogy felkelthesse érdeklődését.* Ez utóbbi már a motiváció szükségességét is előrevetíti.

Problémamegoldás nem létezik problémaérzékenység nélkül. *Ha képesek vagyunk egy feladatban az adatokat, az összefüggéseket úgy boncolgatni, hogy a probléma előbukkan,* *megértjük, hogy mit kérdez a feladat, és hajlandóságunk van arra, hogy a feltett kérdésekre válaszoljunk (azaz megoldjuk a problémát), vagy az adatok alapján kérdéseket tudunk konstruálni (azaz feladatot szerkeszteni), akkor ezt a képességet problémaérzékenységnek nevezzük.*

A probléma nem azonos az ismeretlennel való találkozással, hiszen az ismeretlennel való találkozás, egy fogalom kialakítása, egy feladat megoldása nem biztos, hogy probléma a tanuló számára.

Ennek okai a következők lehetnek:

1) Nincs meg a szükséges érdekeltség, hiányzik a motiváció, a tanuló nem akarja megoldani a problémát.
2) A tanuló ismeretei lényegesen magasabb szintűek, mint amit a feladat megoldása elvár tőle. (Például középiskolában a szorzótábla.) Ebben az esetben jelenik meg az unalom a tanuló munkájában.
3) A feladat megoldásához lényegesen magasabb szintű ismeretek szükségesek, mint amikkel a tanuló rendelkezik. Ekkor a tanuló nem érti a kérdést, a feladat elveszti problémajellegét, érdektelenné válik a tanuló számára, kikerül a tanuló érdeklődési köréből. Ekkor jelenik meg a közömbösség a tanuló munkájában. (Például: Általános iskolában a szinusztétel.)

Ezekből azt is leszűrhetjük, hogy a problémák nem egy adott korhoz kötődnek, hanem viszonylagosak. Egy matematikai feladat valaki számára még nem, valaki számára már nem, valaki számára éppen probléma.

Ezért fontos a tanárnak odafigyelnie mind az ismeretelsajátítási folyamatban, mind a gyakorlásnál arra, hogy az életkornak, a tanulók képességének, képzettségének megfelelő feladatokkal lássa el őket, ügyelve a megfelelő „tálalásra", azaz a motivációra is. A problémamegoldó képesség önmagától nem alakul ki. Erős tanári irányításra, segítségre van hozzá szükség. *Csak a jó problémamegoldó képességgel rendelkező tanár tud jó problémamegoldási képességet kialakítani tanulóiban.*

A következőkben példákat mutatunk arra, hogy a problémamegoldó képesség hogyan alakítható ki, hogyan fejleszthető feladatok megoldásán keresztül. Megmutatjuk a tanári segítségnyújtás lehetőségeit, példákat mutatunk a célravezető kérdésekre.

1) „ Az *ABCD* nem derékszögű paralelogramma *A* csúcsában az *AB*-re, *C* csúcsában a *BC*-re merőlegest állítunk, amelyek *E*-ben metszik egymást. Milyen szöget zár be az *ED* egyenes az *AC* átlóval? Állításunkat igazoljuk!"

A feladat megoldásához tudnia kell a tanulónak a paralelogramma tulajdonságait, illetve a háromszög magasságvonalaira vonatkozó ismeretet. Ezeket az ismereteket 7. osztályban már tanulják, így a probléma megoldása akár egy 7. vagy 8. osztályos tanulótól is elvárható. Viszont elég sok rejtett állítást tartalmaz a feladat, így csak a jó képességű tanulóknak ajánlott feladni. A gyengébb képességű tanulók számára – éppen a megértés és az előzetes ismeretek hiánya miatt – érdektelenné válik a feladat. Nincsenek meg a problémamegoldás feltételei.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen tanári segítséggel, milyen kérdésekkel, milyen utasítással hogyan segíthető a probléma megoldása!
Mint minden szöveges feladatban itt is megtalálhatók az **explicit** (nyílt) és az **implici***t* (zárt) *állítások.* Szerencsés először ezeket kigyűjtetnünk a tanulókkal.

Explicit (nyílt) állításoknak tekintjük azokat az adatokat, illetve a köztük lévő összefüggéseket, amelyek a feladat szövegéből közvetlenül kiolvashatók. (Benne vannak a szövegben.)

Implicit (zárt) állításoknak tekintjük azokat az adatokat, összefüggéseket, képleteket, algoritmusokat stb., amelyek a szövegből közvetlenül nem olvashatók ki, de amelyeket tudnia kell a diáknak ahhoz, hogy a feladatot megoldja. (A szöveges feladatokról részletesen olvashatunk a Matematika tantárgypedagógia I. főiskolai jegyzet XII. fejezetében.)

A feladatban szereplő explicit állítások:

– nem derékszögű paralelogramma,
– *A* pontban *AB*-re merőleges,
– *C* pontban *BC*-re merőleges,
– *E* metszéspont,
– *ED* egyenes,
– *AC* átló.

A feladat implicit állításai:

– Milyen tulajdonságai vannak a paralelogrammának?

– Mi a derékszögű paralelogramma?
– Derékszögű paralelogramma esetén milyen lenne az E és a D pontok viszonya?
– A *DC* és az *AD* egyenesek milyen egyenesei az *ACE* háromszögnek?
– Mit tudunk a háromszög magasságvonalairól?
– Milyen pont a háromszög magasságpontja?

Mint láttuk az implicit „állításokat” kérdés formájában fogalmaztuk meg, mert ezekre a kérdésekre adott válaszok egyben már a probléma megoldását is jelentik. Az állítások felsorolásából az is kiderül, hogy a problémamegoldást az implicit állítások megtalálása teszi nehézzé. Ehhez kellenek a jó tanári kérdések és a megfelelő ábra. Az ábra megrajzolását itt az olvasóra bízzuk, hiszen reményeink szerint matematikával behatóan foglalkozó egyének olvassák írásunkat.

Néhány ilyen kérdés és a rá adott válasz a feladat megoldásával kapcsolatban:

– Miért kötjük ki, hogy nem derékszögű a paralelogramma? (Mert a derékszögű paralelogramma – a téglalap – esetén a *D* és az *E* pont megegyezne. Így a *DE* egyenesről beszélni értelmetlen lenne. Ez egy jó ábrából könnyen kiderül.)
– Mit mondhatunk a paralelogramma szemközti oldalairól? (Párhuzamosak.)
– Ha *AE* merőleges *AB*-re, akkor milyen szöget zár be a *DC* egyenes az *AE*-vel? (Derékszöget. Mivel $AB \parallel DC$ és $AE \perp AB$ akkor $AE \perp DC$.)
– Ha *EC* merőleges *BC*-re, akkor milyen szöget zár be az *AD* egyenes az *EC*-vel? (Derékszöget. Az előző pont gondolatmenete szerint)
– A *DC* és az *AD* egyenesek milyen nevezetes vonalai lesznek az *ACE* háromszögnek? (Magasságvonalai, hiszen egy csúcsból a szemközti oldalra bocsátott merőlegesek.)
– Mit tudunk a háromszög magasságvonalairól?
(Egy pontban metszik egymást. Ez a magasságpont.)
– Az *ED* egyenes milyen nevezetes vonala lesz az *ACE* háromszögnek? (Magasságvonala, hiszen egy csúcsot a magasságponttal kötöttünk össze.)
– Mit tudunk a háromszög magasságvonalairól? (A csúcsokból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőlegesek.)
– Tehát milyen szöget zár be az *ED* magasságvonal az *AC* oldallal? (Derékszöget.)

Látható, hogy a problémamegoldó képesség jó tanári kérdésekkel, jó ábrával, megoldási tervvel, kevés közléssel és direkt utasítással szépen fejleszthető. (Természetesen a kérdések száma, minősége, lebontottsága nagymértékben függ a tanulók fejlettségétől. Van, akinek elég egy-két lényegre törő kérdés, van akinek a fenti erősen lebontott kérdéssor is kevés.)

A következőkben megmutatjuk azt, hogy alsó tagozatban, amikor a problémamegoldáshoz szükséges készségek kevésbé fejlettek, vagy teljesen hiányoznak, hogyan tudjuk fejleszteni ezt a kompetenciát.

2) „Hogyan lehet pontosan 6 liter vizet kimérni egy folyóból, ha csak egy 4 literes és egy 9 literes edényünk van?”
   (A feladatot nehezíthetjük azzal, hogy a legkevesebb öntögetéssel kérjük a megoldást.)
   (TIT Kalmár László Matematika Verseny, Országos Döntő, 2010. 4. osztály)

A tanulók próbálkozásai között szerepel az, hogy csak félig öntik valamelyik edényt. A nyilvánvaló kérdésre, hogy „Pontosan meg tudjuk ezt csinálni?” elbizonytalanodik a gyerek. (Bár kézenfekvő volna, hogy 4 litert, plusz a 4 liternek a felét öntjük a 9 literes edénybe.) Az a tanuló, aki így gondolkodik, kissé még fejletlen a gondolkodási műveletek terén, és az értő olvasásban is van mit pótolnia.
Miután tisztáztuk a feltételeket, felvázoltuk a cselekvés tervét, jöhet a megoldás, illetve jöhetnek a tanári segítő kérdések.

– Melyik edényben lehet végül 6 liter víz?
  Válasz: a 9 literesben.

– Hogyan érhető ez el? Mi lehet az utolsó lépés?
  Válasz: vagy 4 liter + 2 liter, vagy 9 liter – 3 liter.
  A 4 liter + 2 liter elérése elég körülményes, mert mint korábban megfogalmaztuk, vagy az űrtartalmat felezni nem lehet. Csak tele tölthetők az edények, vagy teljesen kiüríthetők.

– Hogy tudjuk elérni azt, hogy a 4 literesben 1 liter víz maradjon?
  Válasz: A 9 literesből kétszer 4 liter vizet kiöntünk, majd a maradék 1 litert átöntjük a 4 literes edénybe.

– Hogyan valósíthatjuk meg, hogy a 3 liter víz segítségével 6 liter legyen a 9 literesben?
  Válasz: A 9 literes edényt teletöltjük, majd átöntünk belőle 3 litert a 4 literesbe.
  Így megoldottuk a problémát, a 9 literes edényben pontosan 6 liter víz van úgy, hogy mindig pontosan mértük ki az űrtartalmakat.

Ennek a problémának a megoldásához nagyon kis matematikai apparátus szükséges, viszont az adatokkal való kombinatív műveletvégzés elengedhetetlen hozzá. A feladat eljátszható, majd ennek alapján modellezhető, ami a problémamegoldáshoz nélkülözhetetlen megértést is segíti.
Érdekességéből adódik a motiváció is. Versenyszerűen, nagy élvezettel dolgoznak a feladat megoldásán a gyerekek.

A problémamegoldó képességben elengedhetetlen, hogy a tanulók bizonyos jártasságokkal rendelkezzenek, azaz meglévő ismereteik kombinatív, alkotómódon való felhasználása révén jutnak új ismeretekhez, illetve a probléma megoldásához.
A jártasságok kialakításához sok – sok gyakorláson keresztül vezet az út, megfelelő tanári segítséggel.

Végül vizsgáljuk meg azt, hogy magasabb színtű matematikai ismereteket igénylő problémák megoldásához hogyan tudjuk hozzásegíteni az érettségi előtt álló jobb képességű tanulókat.

3) „ Egy háromszög szögeire a következő összefüggés teljesül:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$$

Szögei, vagy oldalai szerint milyen lehet ez a háromszög?”

Ez így egy „meghatározó jellegű feladat. Ha ezt „bizonyító” jellegű feladatként fogalmazzuk meg, akkor egészen más jártasságokat tudunk vele fejleszteni.

A feladat más megfogalmazása:

„Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszög szögeire teljesül a $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$ összefüggés, akkor a háromszög egyenlőszárú, vagy derékszögű.”
(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 11. 2. 89.)

Bár bizonyításos feladatokat a tanulók kevésbé szeretik (a későbbi fejezetekben taglaljuk, hogy miért), viszont itt mégis könnyebb a második esetet megoldani, mert míg az első esetben sötétben tapogatózik a tanuló, addig a második megfogalmazás segítséget is ad. (Tudjuk, hogy mi jellemző az egyenlőszárú és a derékszögű háromszögekre, és ez hogyan nyilvánul meg a szögek közti összefüggésben.)

Mi most az első megfogalmazású – a meghatározó jellegű – probléma megoldásának útját mutatjuk meg.
Kérdések és a várt válaszok:

– Oldalaik, vagy szögeik szerint milyenek lehetnek a háromszögek?
  Válasz: általános, egyenlőszárú, egyenlő oldalú vagy hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű.

– A megadott feltétel alapján melyik esetet kell figyelembe vennünk?
  Válasz: a másodikat, mivel oldalak nem szerepelnek a feltételek között és a szögfüggvényekből tudunk következtetni a szögek közti összefüggésekre.

– Milyen összefüggések lehetnek a háromszög két szöge között?
  Válasz: $\alpha = \beta$; $\alpha + \beta = 90^\circ$; $\alpha + \beta \neq 90^\circ$
  (Egyenlőszárú-, derékszögű-, általános háromszög.)
– Milyen összefüggések alapján lehet átalakítani az egyenletet úgy, hogy ($\alpha \pm \beta$) valamilyen szögfüggvénye szerepeljen benne, amiből már következtethetünk a köztük lévő kapcsolatra?
  Itt jöhet a tanári segítség!
  A $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$ egyenletet olyan alakra hozzuk, hogy felismerhető legyen a korábban tanult ismeret. $(\sin\alpha - \sin\beta) + (\cos\alpha - \cos\beta) = 0$
  A következő ismeretek felhasználásával átírhatjuk az egyenletet:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2\, sin\, \frac{\alpha-\beta}{2}\, (cos\, \frac{\alpha+\beta}{2} - sin\, \frac{\alpha+\beta}{2}\,) = 0$$

– Egy szorzat mikor 0?

Válasz: ha valamelyik tényezője 0. Azaz:

$$sin\, \frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \quad \text{vagy} \quad cos\, \frac{\alpha+\beta}{2} = sin\, \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Innen rutinfeladat a megoldás. A tanulók már tanári segítség nélkül is elboldogulnak vele.

I. $$\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

$$\alpha = \beta$$

A háromszög két szöge egyenlő, a háromszög egyenlőszárú.

II. $$cos\, \frac{\alpha+\beta}{2} = sin\, \frac{\alpha+\beta}{2} = cos\, (\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2})$$

Ebből: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Ha egy háromszög két szögének összege 90^o, akkor a harmadik szöge is 90^o, azaz a háromszög derékszögű.

A feladat megoldása: a háromszög egyenlőszárú, vagy derékszögű.

(Mivel α és β egy háromszög két szög, így a forgásszögeket nem kell figyelembe vennünk.)

A három kidolgozott, és kérdésjavaslatokkal ellátott feladat alátámasztja a fejezet elején mondottakat. A probléma mindig viszonylagos. Erősen befolyásolják a problémamegoldást a tanuló meglévő ismeretei, ismereteinek hiánya, a motiváció és az akarati tényezők.

A problémamegoldó képességet csak az a tanár tudja kialakítani a tanulókban, aki maga is probléma érzékeny, továbbá a problémamegoldó képesség csak problémák megoldásán keresztül sajátítható el. Kezdetben döntő a tanári tevékenység – a tanuló reprodukál – később kialakulnak a szükséges jártasságok, készségek, és ekkor a reprodukciót (a tanár megoldásának követését) sok gyakorlás után felváltja a konstrukció, amikor a tanuló önállóan képes – esetleg tanári útmutatótól teljesen eltérő – megoldást konstruálni.

Mindezek feltétele a nem vaktában, véletlenszerűen történő próbálkozás, hanem az ismeretek tervszerű, célszerű, kombinatív alkalmazása, a tudatos tanulói – tanári közös tevékenység. A tanulók eltérő adottsága, képessége, képzettsége, készsége miatt a differenciált foglalkoztatást ajánljuk leginkább egyéni, páros, vagy csoportmunkában.

Kulcsszavak

probléma

problémaérzékenység

megértés

problémamegoldás

explicit állítások

implicit állítások

problémamegoldásra való alkalmasság

Kérdések, feladatok:

1) Mi jellemzi a tanulók problémaérzékenységét?
2) Hogyan motiválhatók a tanulók a problémák megoldásában?
3) Elemezze a megértés és a problémamegoldás folyamatát!
4) Keressen a Hajdu – féle tankönyvcsalád könyveiből olyan feladatokat, amelyekkel a problémamegoldó képesség jól fejleszthető!
   Konstruáljon kérdéseket, és adja meg a megoldási útmutatókat is!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
   Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Faragó László: Szöveges feladatok megoldása egyenlettel
   Tankönyvkiadó, Budapest, 1969
3. Kürti Jarmila: Kreativitásfejlesztés középiskolás korban
   Tankönyvkiadó, Budapest, 1982
4. Kürti Istvánné: Tervek, hipotézisek, stratégiák a 9-14 éves gyerekek gondolkodásában
   Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982

5. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 5-12. osztály számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Ajánlott irodalom:

Pólya György: A gondolkodás iskolája
Akkord Kiadó, Budapest, 2000
Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1968
Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984
Salamon Jenő: Az alkotó gondolkodás kutatási problémái
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979

III. Számolási készség

Számolás írásban, fejben; a hétköznapok matematikája

Többen lebecsülik, mások túlértékelik az embernek ezt a képességét. Az igazság a két szemléletmód között van. Csak azért „tudni számolni”, hogy öncélúan dicsekedjünk tudományunkkal (például többjegyű számot többjegyűvel „fejben” szorozni, osztani, vagy „fejben” négyzetgyököt vonni többjegyű számból) nincs értelme, vagy legalábbis nem sok. De nem haszontalan, mert azt azért el kell ismerni, hogy az öncélú számolás is sok agysejtünket megmozgatja, fejleszti a memóriánkat és az algoritmikus gondolkodásunkat is. De az öncélú számolást nem tekintjük értékes képességnek.

Olyan számolási készséget kell kialakítanunk a tanulóinkban, amely segíti őket a társadalmi beilleszkedésben, a gyakorlati életben való alkalmazásban, a matematikai feladatok megoldásában és ezek által a gondolkodás fejlesztésében, az egyszerűségre és a célszerűségre való törekvésben.

Elmondhatjuk, hogy az a számolási készség értékes, ami tudatosságon alapszik, ami alkalmazásra képes, továbbá ami eszköz egyéb matematikai és nem matematikai tevékenységhez. Tehát az „értelem nélküli” verbális számolási készség helyett a tudatos számolási készség kialakítása lehet a célunk. Ennek megfelelően kell felépítenünk, megterveznünk a feladatsorokat is. Minden esetben törekednünk kell a célszerűségre, az egyszerűségre és a pontosságra.

A fejlett számolási készséghez a számok írása, olvasása, helyiérték szerinti bontása, műveletek végzése, a műveleti tulajdonságok alkalmazása, nagyság szerinti rendezés, a számegyenesen való ábrázolás, a halmazokba rendezés, a becslés, a kerekítés, a becsült és a kerekített értékkel való számolás is hozzátartozik.

Az ember vásárláskor, üzletkötéskor, a munkában vagy máshol a gyakorlati életben nem pontos, hanem hozzávetőleges értékkel dolgozik, mintegy körülbelül megtervezve a tevékenységét, a fizetendő összeget, vagy a járandóságát, esetleg az elvégzendő munkára fordítható időt, bizonyos megteendő távolságokat stb. Ehhez viszont nélkülözhetetlen a becslésre és a kerekítésre való képesség, a nagysági relációk, és ezek tulajdonságainak ismerete, a természetes, az egész, a racionális és a valós számok közti kapcsolatok biztos tudása is.

Hogyan tudjuk kialakítani, fejleszteni tanulóink számolási készségét?

Példaként nézzünk egy, a tanulók által érdekesnek tartott feladatot. Akár már általános iskolában megkérdezhetjük, de középiskolában az algebrai kifejezések tanítása után – mintegy belső koncentrációként – mindenképpen javasoljuk a feldolgozását annak, hogy mennyi 15, 25, 35, 45, stb. számok négyzete. Esetleg tanulópárokban versenyeztetjük őket, és a tanár is részt vesz a versenyben. Nagy valószínűséggel ő fog győzni addig, amíg a tanulók fel nem fedezik a szabályt. (Kezdetben a tanulók számológépen ellenőrzik az eredményeket.)

$15^2 = 225;\ \ 25^2 = 625;\ \ 35^2 = 1225;\ \ 45^2 = 2025;\ \ \ldots$

Megfigyelhetjük, hogy minden 5-re végződő szám négyzete 25-re végződik. A 25 előtt lévő szám pedig az első számjegy és a számsorban utána következő szám szorzata.

$1 \cdot 2 = 2;\ \ 2 \cdot 3 = 6;\ \ 3 \cdot 4 = 12;\ \ 4 \cdot 5 = 20;\ \ \ldots$

Ezek után a tanulók is könnyen kiszámíthatják akár háromjegyű 5-re végződő számok négyzetét is.

Például: $105^2 = 10 \cdot 11 \cdot 100 + 25 = 11025$

Miután konkrét példákon megmutattuk az algoritmust, lehetőleg úgy, hogy azt a tanulók fedezzék fel, tudunk általánosítani, és ezt az ismeretet tudjuk kapcsolni az algebrai kifejezések témakörhöz ismétlésként mintegy visszacsatolásként.

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot a \cdot (a + 1) + 25$$

Magyarázat:

Minden 5-re végződő természetes szám felírható $10a + 5$ alakban. (Például: $85 = 10 \cdot 8 + 5$; $135 = 10 \cdot 13 + 5$ stb.)
Ha egy természetes számot 100-zal megszorzunk, akkor a szorzat biztosan két 0-ra végződik, tehát $85^2 = 100 \cdot 8 \cdot 9 + 25$, és minden más 5-re végződő természetes szám négyzete is ezért végződik 25-re. Ez az ismeret is csak akkor válik hasznos készséggé, ha a tanuló érti is azt, hogy miért így képezzük ezeket a négyzeteket, és nem csak verbálisan bemagolja a szabályt.
Még értékesebb ez a készség, ha a tanuló tovább tudja fejleszteni az itt tanultakat, például a tizedes törtekre.

$$3{,}5^2 = 12{,}25; \quad 3 \cdot 4 + 0{,}25 = 12{,}25$$

A helyiértékre külön ügyelni kell. $0{,}5^2 = 0{,}25$.

Ennél még fejlettebb készséget jelent, ha a tanuló az itt taglalt ismereteket több tizedes jegyet tartalmazó esetekben is tudja alkalmazni.
Például: határozzuk meg $1{,}05^2$-t! Ez a helyiértékek alapos ismerete nélkül nem megy.
A megoldás menete: visszavezetjük megoldásunkat a korábbi ismeretekre.

$$1{,}05^2 = (10{,}5 \cdot \frac{1}{10})^2 = 10{,}5^2 \cdot (\frac{1}{10})^2 = (10 \cdot 11 + 0{,}25) \cdot \frac{1}{100} =$$

$$= 10 \cdot 11 \cdot \frac{1}{100} + 0{,}25 \cdot \frac{1}{100} = 1{,}10 + 0{,}0025$$

Ebből: $1{,}05^2 = 1{,}1025$

Ha az előbbi ismeretet értelem nélkül alkalmaznánk ebben az új helyzetben, akkor könnyen kaphatnánk a hibás $1 \cdot 2 + 0{,}0025 = 2{,}0025$ eredményt.
Ezzel mintegy igazoltuk azt, hogy csak a tudatos számolási készség elfogadható számunkra.

A feladat általánosításából az is látható, hogy bármely 5-re végződő számra igaz az összefüggés.

Nézzünk most alsó tagozatból egy példát, amellyel a tudatos számolási készséget tudjuk kialakítani úgy, hogy nem a „lélekölő”, unalmas, egyszerű numerikus összeadást, kivonást gyakoroltatjuk a tanulókkal.

„Egy képen 5 színes játékfigurát lát a gyerek, és mindegyikhez odaírták az árát is.

Mackó – 641 Ft;

Kirakós játék – 716 Ft;

Baba – 624 Ft;

Labda – 328 Ft;

Vitorlás modell – 456 Ft

A feladat:

a) Számítsd ki, mikor mennyit fizetett Gabi, ha legfeljebb 2 játékot venne; legalább 3 játékot venne?
b) Ha két játékot vásárol Toncsi, akkor még marad pénze, de 3 játékot már nem tud megvenni.
   Mennyi pénze lehet Toncsinak?
   (Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3. 91/15.)

Azon túl, hogy a tanulónak tudnia kell háromjegyű számokat összeadni, kivonni, még ismernie kell a legfeljebb, legalább fogalmakat is, továbbá összegeket össze is kell hasonlítani, rendezni, valamint becsült és kerekített értékkel dolgozni.
Tehát az egyszerű, gépies alapműveleteken túl még olyan ismereteket is elsajátít a tanuló, ami „besegít” a többi kompetenciaterület fejlesztésébe is.
A kérdésekre adott válaszok igazolják az előbb mondottakat.

a) Ha *legfeljebb* 2 játékot venne Gabi, akkor vehet egyet, vagy kettőt. (A tanulók többsége már itt téveszt, hiszen ők *pontosan* 2 játékban gondolkodnak.
   A legkevesebb , amit Gabi fizethet 328 Ft, a legtöbb pedig 1357 Ft.
   Ezen értékek között még 13 lehetőség van, különböző értékekkel. A kombinatorikus gondolkodás fejlesztését szolgálja ezeknek a lehetőségeknek a felsorolása.
   (5 elemből 1 elem ötféleképpen, 5 elemből 2 elem tízféleképpen választható ki.)

Ha *legalább* 3 játékot venne Gabi, akkor vehet 3-at, 4-et, vagy 5-öt. A tanulók többsége, akinek az értő olvasása, és a problémamegoldó gondolkodása kissé fejletlenebb, a *pontosan* három játékban gondolkodik. Ezzel jelentősen leszűkítik a megoldást.

A legkevesebb, amit Gabi fizetett 1408 Ft, a legtöbb, pedig 2765 Ft.

Ezen értékek között még 14 különböző összeg lehet.

(5 elemből 3-at tízféleképpen, 5 elemből 4-et ötféleképpen, 5 elemből 5-öt egyféleképpen választhatunk ki.)

b) A megoldás itt a jó elemi számolási készségen túl, fejlett problémamegoldó képességet is feltételez.

Hogy bármelyik 2 játékot megvehesse, ahhoz 1357 Ft-nál több pénze kell legyen, (hiszen még marad pénze), de 3 játékot már nem vehet meg, ami azt jelenti, hogy 1408 Ft-nál kevesebb pénze van. (A 2 legdrágább, és a 3 legolcsóbb játék árainak összege közti értékek a megfelelőek.)

Ez szép példa arra, hogy érdekes, egyéb kompetenciaterületeket is fejlesztő, jól motiváló feladatokkal hatékonyabban tudjuk fejleszteni a számolási készséget.

2) Végezd el a tagok ügyes csoportosításával a következő műveleteket!

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{5}+\frac{7}{9}+\frac{3}{4}+\frac{2}{9}=$$

(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 6. B 1.92.a))

Megoldás:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{7}{9}+\frac{2}{9}\right)+\frac{4}{5}=1+1+\frac{4}{5}=2\,\frac{4}{5}$$

3) Alakítsd a következő hányadosokat úgy, hogy az osztó 0-ra végződő szám legyen, de a hányados ne változzék! Így is végezd el az osztást!

a) 19 : 5 =

b) 3475 : 25 =

(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 6. B 1.101.)

Megoldások:

a) $(19 \cdot 2) : (5 \cdot 2) = 38 : 10 = 3{,}8$

b) $(3475 \cdot 4) : (25 \cdot 4) = 13900 : 100 = 139$

Az ilyen típusú feladatokkal tudjuk megmutatni, hogy a hosszú számolási eljárások helyett célszerű gondolkodni, s az egyszerűbbé, átláthatóbbá alakított műveletet elvégezni.

A csoportosításokkal elérjük, hogy két-két összeg értéke 1 legyen, illetve a hányados változásainak ismeretét felhasználva (a hányados értéke nem változik, ha az osztandót és az osztót ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk) jutunk olyan egyszerű műveletekhez, amit már a gyengébb képességű tanuló is el tud végezni. (szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel stb.)

A következő feladat szép példa arra, hogy a tudatos számolási készség mennyire megkönnyíti munkánkat.

4) Végezzük el a műveleteket!

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} =$$

Megoldás:

Ránézésre látszik, hogy a közös nevező meghatározásával, közös nevezőjű törtek összeadásával nagyon időigényes, körülményes, és sok tévedési lehetőséget magában rejtő megoldást produkálhatnánk.

A tudatos, értékes számolási készséggel viszont nagyon egyszerűen megoldható a feladat. Pusztán azt az „egyszerű” tényt kell észrevennünk, hogy:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \quad \ldots$$

(Az „egyszerűt” azért tettük idézőjelbe, mert ezzel tudjuk kihúzni a feladat méregfogát, ezzel fogjuk meg a lényegét, és ezzel tudjuk gyorsan, pontosan megoldani a feladatot. Tehát ez az „egyszerűség” ugyancsak feltételezi a problémamegoldó képesség meglétét.)

Ezek alapján adjuk meg a megoldást:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

(A többi egymás mellett lévő tag összege 0.)

A számolási készség kialakításánál az a célunk, hogy ne verbális, értelem nélküli, bemagolt műveleteket szajkózzanak tanítványaink, hanem tudatos matematikai tevékenységet folytatva, a lehetséges összefüggéseket és egyszerűsítési lehetőségeket feltárva, a lehető legkevesebb hibával, és a lehető legtöbb gyakorlati alkalmazhatóság bemutatásával sajátítsák el a számolási készséget.

Végül – érdekességként – bemutatunk két olyan eljárást, ami az utóbbi időkben már legfeljebb kiegészítő anyagként került be a matematika tankönyvbe, de érdekessége miatt célszerű ma is megmutatni tanítványainknak.
(Természetesen azért is, mert a zsebszámológépek, valamint a négyzet- és négyzetgyök – táblázatok pontossága véges, így van olyan eset, amikor valós követelmény, hogy numerikusan számoljuk ki a keresett értékeket, amikor a zsebszámológépünk, vagy táblázatunk csak kerekített értékek megadására képes. Egyébként ez a két példa a későbbiekben tárgyalandó algoritmikus gondolkodás kompetenciájának kialakítását is nagymértékben segíti.

A feladatok:

„Határozzuk meg a 415,3 négyzetét!”

(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 10. 29. oldal 13.)

$$\begin{aligned}
&(4\cdot 10^2+1\cdot 10^1+5\cdot 10^0+3\cdot 10^{-1})^2=\\
&=4^2\cdot 10^4+1^2\cdot 10^2+5^2\cdot 10^0+3^2\cdot 10^{-2}+\\
&+2\cdot 4\cdot 1\cdot 10^3+2\cdot 1\cdot 5\cdot 10^1+2\cdot 5\cdot 3\cdot 10^{-1}+\\
&+2\cdot 4\cdot 5\cdot 10^2+2\cdot 1\cdot 3\cdot 10^0+\\
&+2\cdot 4\cdot 3\cdot 10^1
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr}
415{,}3^2= & 16012509\\
 & 081030\\
 & 4006\\
 & +\quad 24\quad.\\
\hline
 & 172474{,}09
\end{array}$$

A négyzetre emelés lépései:

(1) Minden számjegynek vesszük a négyzetét, s kettes csoportokban ($4^2 = 16$; $1^2 = 01$; $5^2 = 25$; $3^2 = 09$; . . .) leírjuk az egyenlőségjel után. A tizedesvesszőt itt nem vesszük figyelembe, csak a végén az eredmény pontos meghatározásánál.

(2) Az utolsó jegytől haladva mindegyik számnak és az előtte levőnek vesszük a kétszeres szorzatát. Ezeket egy jeggyel balra kezdve az előző sor alá írjuk.

(3) Ismét az utolsó jegytől haladva mindegyik számnak és a kettővel előtte lévőnek vesszük a kétszeres szorzatát (azaz egy számjegy kimarad), s ezt ismét egy jeggyel balra kezdve az előző sor alá írjuk.

(4) Ismét az utolsó jeggyel kezdve – most két számot kihagyva – vesszük a kétszeres szorzatokat, s egy jeggyel balra kezdve az előző sor alá írjuk. És így tovább, míg az utolsó és az első számjegy kétszeres szorzatát írjuk az utolsó sorba.

(5) Összeadjuk a részletszorzatokat.

(6) Az eredményben kétszer annyi tizedesjegyet jelölünk meg, mint amennyi az eredeti számban volt.

A zsebszámológépek elterjedése előtt a négyzetgyökvonást is írásban végezték el a tanulók. Megmutatjuk ezt az algoritmust is.

„Határozzuk meg numerikus számolással 328,415 négyzetgyökét!”
(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 10. 29.oldal 14.)

$\sqrt{328{,}415} = \sqrt{328{,}4150} = 18{,}122$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{328{,}415} \approx 18{,}122$

$$
\begin{array}{l}
22\underline{8} : 28 \cdot 8 \\
\quad 44\underline{1} : 361 \cdot 1 \\
\qquad 805\underline{0} : 3622 \cdot 2 \\
\qquad\quad 8060\underline{0} : 36242 \cdot 2 \\
\qquad\qquad 8116
\end{array}
$$

A négyzetgyök lépései:

(1) A tizedesvesszőtől jobbra és balra kettesével csoportosítjuk a számokat. Az egészek helyén az első csoport vagy egyes vagy kettes csoport lesz, a többi kettes csoport, míg a törtrésznél szükség esetén kiegészítjük 0-val (vagy 0-kal) a számot, hogy mindegyik csoport két számjegyből álljon.

(2) Megkeressük azt a legnagyobb természetes számot, amelynek a négyzete nem nagyobb az

első csoportnál. ($1^2 \leq 3$; $2^2 \geq 3$) Ezt a számot írjuk az eredménybe, s ennek a négyzetét kivonjuk az első csoportból. ($3 - 1^2 = 2$)

(3) Leírjuk a különbség (2) mellé a következő számcsoportot (28), s megnézzük, hogy ennek az utolsó jegyét nem véve figyelembe, hányszor van meg benne az eredménybe írt szám kétszerese. (22<u>8</u> : 2; 22-ben az 1 kétszerese)

(4) Ezt a becsült hányadost három helyre írjuk le. Az eredmény (18) második jegye lesz, továbbá a 2-es osztó után, s még a 28 szorzójaként. ($228 : 28 \cdot 8$)

(5) Vesszük a 228 és a $28 \cdot 8$ különbségét: 4.

(6) Leírjuk a különbség (4) mellé a következő csoportot (41), s az eredményben kitesszük a tizedesvesszőt. (Hiszen az eredeti számban is most értünk el a tizedesvesszőhöz.)

(7) Megnézzük, hogy ennek az utolsó jegyét (1) nem fegyelembe véve hányszor van meg benne az eredményben írt szám (18) kétszerese. (44 : 36)

(8) A hányadost (1) ismét három helyre írjuk le. Az eredménynek (18,1) ez lesz a következő számjegye, s ezen túl az osztóban kétszer. ($441 : 361 \cdot 1$)

(9) Vesszük a 441 és a $361 \cdot 1$ különbségét: 80

(10) Leírjuk a különbség (80) mellé a következő számcsoportot (50), s megnézzük, hogy ennek az utolsó jegyét (0) nem figyelembe véve hányszor van meg benne az eredménybe írt tizedesvessző nélküli szám kétszerese. (805 : 362)

(11) A hányadost (2) ismét három helyre írjuk le. Az eredménynek (18, 12) ez lesz a következő számjegye, s ezen túl az osztóba kétszer. ($8050 : 3622 \cdot 2$)

(12) Vesszük a 8050 és a $3622 \cdot 2$ különbségét: 806.

Innen, mivel nincs több értékes számjegy, 00 csoportokkal folytathatjuk a műveletet a kívánt pontosságig.

Ellenőrzés: $18{,}122^2 \approx 328{,}407$

Az eltérés 0,008. Ez csökkenthető úgy, hogy több tizedesjegyig határozzuk meg a négyzetgyököt. Pontos értéket sohasem kaphatunk, a $\sqrt{328{,}415}$ irracionális szám, így véges tizedestört alakban nem írható fel.

Összefoglalva:

Óriási a tanár felelőssége abban, hogy tanulóiban olyan számolási készséget alakítson ki, amivel azok a gyakorlatban jól tudnak boldogulni, ami elősegíti, és nem hátráltatja a számolási készség egyéb matematikai és nem matematikai területeken való alkalmazását, amellyel megvalósítható az egyszerűségre, célszerűségre törekvés, azaz olyan készséget, amely jó eszközrendszerként funkcionál a társadalmin beilleszkedéshez.

Kulcsszavak

számfogalom

számhalmazok

a számolási készség ismérvei

az 5-re végződő számok ismérvei

négyzetreemelés

négyzetgyökvonás

egyszerűség, célszerűség, alkalmazhatóság

Kérdések, feladatok:

1) Melyik osztályban milyen műveleteket és műveleti tulajdonságokat tanítana és hogyan?
2) Mi az 5-re végződő számok négyzetre emelésének szabálya?
3) Keressen olyan eljárásokat, amelyekben a műveletek egyszerűsítését, célszerűsítését tudja elsajátíttatni!
4) Írjon fel egy ötjegyű számot (akár tizedestörtet is), és emelje négyzetre, illetve vonjon belőle négyzetgyököt numerikusan! Mindkét műveletet ellenőrizze az inverz művelettel!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
   Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

IV. A gondolkodási műveletekben való jártasság

„A nagy felfedezések nagy feladatokat oldottak meg, de nincs olyan feladat, amelynek megoldásához ne volna szükség valami kis felfedezésre. Lehet, hogy a feladat, amin gondolkozol egyszerű, de ha felkelti érdeklődésedet, mozgósítja találékonyságodat és végül, ha sikerül önállóan megoldanod, átéled a felfedezés izgalmát és diadalát. Ha még fogékony

korban sikerül ilyen tapasztalatot szerezned, kedvet kapsz a szellemi munkára, és ez talán egész életedre szóló nyomot hagy gondolkodásodban és jellemedben."
írja Pólya György *A gondolkodás iskolája* című munkájában. A továbbiakban azzal folytatja, hogy a tanulók gondolkodásának fejlesztése terén milyen feladat hárul a matematikatanárokra.

„Ha a matematikatanár a rendelkezésre álló időt azzal tölti ki, hogy sablonos példákon gyakoroltatja tanítványait, akkor kiöli belőlük az érdeklődést, fékezi a szellemi fejlődésüket, és visszájára fordítja kedvező lehetőségeit. Ha azonban tudásukhoz mért feladatokkal és rávezető kérdésekkel segítségükre van a megoldásban, kedvet csinálhat nekik, és eszközt adhat kezükbe az önálló gondolkodáshoz."
(Pólya György: A gondolkodás iskolája, Gondolat Kiadó, Budapest, 1977)

Minden matematikatanár számára megfontolandók és követendők ezek az intelmek. Egy matematikai fogalom, tétel, algoritmus megtanítása nem lehet öncélú. Nem azért kell valamit megtanítani, hogy a tanuló azt egyszerűen reprodukálja, hanem azért, hogy képes legyen eligazodni az ismeretek rendszerében, tudjon beilleszkedni a társadalomba, tudjon adatok között különbséget tenni, melyik fontos, melyik nem a társadalmi tevékenységhez, legyen a gondolkodása olyan, hogy fel tudja fogni az adatok közti kapcsolatokat, s ezáltal legyen képes problémákat megoldani. Tehát a matematikatanár legfontosabb feladata az, hogy az ismeretek rendszerének elsajátítása során fejlessze a tanulók gondolkodását.

A gondolkodás teszi képessé az embert a természeti és társadalmi törvények megismerésére, és arra, hogy a természeti törvényeket, erőket saját szolgálatába állítsa.

Mint korábban írtuk a matematikai gondolkodásnak két fő funkciója van: a **megértés** és a **problémamegoldás**.

Megértés

A dolgok, a jelenségek, a fogalmak lényegének és alapvető összefüggéseinek feltárása.

Problémamegoldás

Eddig nem ismert, új feladatok megoldása, hipotézisek felállítása, új megoldási módok kipróbálása, törvényszerűségek felfedezése.

A gondolkodásnak e két funkciója nem választható külön egymástól. A megértés sokszor jelent problémát, hiszen megérteni valamit annyit jelent, mint beépíteni az adott ismeretet a meglévő ismeretek rendszerébe (asszimiláció) vagy alkalmazkodni hozzá (akkomodáció). Ez viszont eddig nem ismert új kapcsolatok feltárását igényli. A problémamegoldást pedig mindig megőrzi a megértés. Tehát e két funkció együtt jelentkezik a gondolkodásban.

Nagyon gyakran előfordul, hogy a tanulók a feladat megoldásához szükséges minden matematikai ismerettel rendelkeznek, de mégsem tudják megoldani a problémát.

Ennek igazolására nézzük a következő példát. A szerző egy tanártovábbképző-előadáson – a résztvevők több éves, évtizedes gyakorlattal rendelkeznek – a gondolkodási műveletek problémamegoldásban betöltött szerepét igazolandó, a következő feladat megoldását kérte. (A tanárok többsége 10 perc alatt nem tudta megoldani a feladatot.)

„Bizonyítsa be, hogy minden háromszögben van olyan oldal, amely nem nagyobb a másik két oldal számtani közepénél!"

(Összefoglaló Feladatgyűjtemény Matematikából, 1684. feladat)

Megoldás:

Mivel „minden" háromszögre igaz az állítás, így olyan összefüggést kell felírnunk az oldalakra, amely bármely háromszögre igaz. A háromszög oldalaira a következő összefüggés írható fel:

$$a \le b \le c$$

Ebben az összefüggésben benne van az egyenlő oldalú, az egyenlőszárú és az általános háromszög is. Tehát az általánosság nem szenved csorbát.

(Nem szűkítettük le a feladatot.)

A „van olyan oldal, ami nem nagyobb" kitételből arra következtethetünk, hogy (ha van ilyen) a legkisebb oldalra biztos, hogy teljesül a feltétel.

(Tehát azt szeretnénk igazolni, hogy $a \le \frac{b+c}{2}$.)

Az első megállapításból következik:

$$a \le b \quad \text{és} \quad a \le c \qquad \text{(mivel } b \le c \text{ is teljesül.)}$$

A két egyenlőtlenség összevonásából:

$$2a \le b + c \text{ , amiből}$$

$$a \le \frac{b+c}{2}$$

Ezt akartuk bizonyítani.

A feladat megoldása során a megoldóknál jelentkező problémák közül az értő olvasás, és a lényeges jegyek kiemelésének hiánya a szembetűnő.

Többen úgy gondolták, hogy minden háromszög minden oldalára igaz az állítás, így vakvágányra futott az okoskodásuk.

A másik ok a helytelen analógia és a funkcionális rigiditás érvényesülése. (Ezekről később részletesen szólunk.)

A megoldók többsége a háromszög-egyenlőtlenségből indult ki, és az

$$a < b + c; \qquad b < a + c; \qquad c < a + b$$

összefüggések segítségével próbálta igazolni az állítást. Ez azért téves, mert a háromszög egyenlőtlenség minden háromszögre igaz, itt pedig nem erre utalt a feladat állítása.

Tehát a megoldók többsége olyan ismeretet próbált alkalmazni a probléma megoldása során, ami az adott feladatra nem érvényes (helytelen analógia), illetve a megkezdett útról később nem tudtak letérni, nem tudtak megoldási sémát váltani (funkcionális rigiditás).

Vegyük észre, hogy a probléma megoldásához szükséges matematikai apparátus, a „minden", „van olyan" helyes értelmezése, a $\leq$ reláció felismerése felírása, és ezen reláció tranzitív voltának alkalmazása.

Tehát valóban nem volt szükség magasabb matematikai ismeretekre a megoldáshoz, de az ismeretek összekapcsolásához olyan gondolkodási műveletek voltak szükségesek, amelyek a résztvevőkben a kívánt szintnél alacsonyabbak voltak.

(Bár sokan mondják, hogy a legegyszerűbb – „csak gondolkodást igénylő" – feladatok megoldása a legnehezebb. Nem lehet a megoldásra egy begyakorolt formulát alkalmazni.)

A fenti példa figyelmeztető lehet minden tanár számára, nevezetesen azért, hogy milyen ismeretet, miért és hogyan sajátíttatunk el úgy, hogy a lexikális ismereteken túl egyéb kompetenciákat is fejleszthessünk.

A matematikatanítás során a következő gondolkodási műveleteket fejleszthetjük:

- analízis,
- szintézis,
- absztrahálás,
- konkretizálás,
- általánosítás,

- specializálás,
- összehasonlítás, kiegészítés,
- rendezés,
- analógia,
- összefüggések feltárása,
- lényegkiemelés,
- ítéletalkotás,
- fogalomalkotás,
- bizonyítás,
- transzferálás.

(Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978)

Analízis – szintézis

Az adott ismeretet részeire bontjuk, e részeket önálló egészeknek fogjuk fel, elvégezzük ezekkel a kívánt vizsgálatokat, műveleteket, majd a szerzett ismereteket összerakjuk egésszé. Az analízis nem választható el a szintézistől.

Absztrahálás – konkretizálás

Konkrét dolgoknak közös tulajdonságát emeljük ki, azaz egy elemből következtetünk az őt tartalmazó halmazra (absztrahálunk), illetve a halmazra jellemző tulajdonságot vonatkoztatjuk annak egy elemére (konkretizálunk).

Általánosítás – specializálás

Az általános és a speciális között halmaz-részhalmaz viszony van. Általánosítás során egy halmazból az őt tartalmazó halmazra térünk át (például a négyszögek halmazábrája). Specializálás során valamely halmaz részhalmazára következtetünk. (Például: speciális trapéz a paralelogramma.)

Az absztrakt-konkrét között halmaz-eleme viszony, míg az általános-speciális között halmaz-részhalmaz viszony áll fenn.

Összehasonlítás

Olyan gondolkodási művelet, amelynek során különböző tárgyakról, fogalmakról, ismeretekről stb. döntjük el, hogy ők maguk, vagy tulajdonságaik megegyeznek-e, vagy különböznek egymástól. Például.

végtelen szakaszos tizedes tört – racionális szám

0,9999… = 1; legalább 5 ≠ kisebb, mint 5.

Kiegészítés

Egy adott elemhez (objektumhoz) valamely ismert kapcsolat alapján meg tudjuk adni a neki megfelelő elemet. Például: bűvös négyzet, szabályjátékok, mondatkiegészítések.

Rendezés

Adott halmazt meghatározott szempont szerint részhalmazaira, vagy elemeire bontunk. Például: relációk – függvények – lineáris függvények.

Analógia

A matematikai feladatmegoldásokban nagy segítség, ha a tanuló az adotthoz hasonló feladatot már megoldott. A hasonlóság mind tartalomban, mind megoldási módban értendő. Így alkalmazva a hasonló feladat megoldási módját könnyebben boldogul a tanuló az új feladattal. Az analógia gondolkodási művelet képessé teszi a tanulót arra, hogy korábban tanult algoritmusokat, tételeket, definíciókat felismerve új helyzetben alkalmazza azokat, illetve egy problémát általánosítson, vagy kiegészítsen, kiterjesszen. Szép példa a sík és a tér analógiája. Például kúpba írt gömb – háromszögbe írt kör stb.

Összefüggések feltárása

Két vagy több halmaz, illetve azok elemei közötti kapcsolat megkeresése. A matematikai feladatok (főleg szöveges és szerkesztési feladatok) megoldása elképzelhetetlen e gondolkodási művelet nélkül. Ha erre a műveletre nem képes a tanuló, feladatmegoldása véletlenszerű, tudatosságtól mentes lesz. Ez összetett gondolkodási művelet, feltételezi a korábbi gondolkodási műveletek meglétét.

A további gondolkodási műveletek is feltételezik, magukba foglalják az itt felsoroltakat. Ezeket – tehát a *lényegkiemelést, ítéletalkotást, fogalomalkotást, bizonyítást, transzferálást – többszörösen összetett gondolkodási műveleteknek nevezzük.*

Mindegyik elengedhetetlen mind a megértéshez, mind a problémamegoldáshoz.

A tanítási – tanulási tevékenységet akkor irányítja jól a pedagógus, ha az ismeret elsajátításakor, a fogalomalkotáskor, a begyakorláskor olyan feladatokat választ, amelyekkel a fenti műveletek leginkább fejleszthetők.

Tehát a matematika tanításában is érvényesülnie kell annak, hogy inkább kevesebb feladatot oldassunk meg egy órán, de azokat részletesen beszéljük meg, keressünk hozzá hasonlókat, terjesszük ki a problémát, azaz úgy dolgozzuk fel, hogy a tanuló minél több gondolkodási műveletet sajátítson el, gyakoroljon be, mert ezekkel egy sor egyéb kompetenciát is tudunk fejleszteni.

Néhány kidolgozott mintapéldán keresztül vizsgáljuk meg, hogy hogyan mérhetők, fejleszthetők ezek a gondolkodási műveletek. (Azért nem külön-külön mutatjuk meg a fejlesztési lehetőségeket, mert egy-egy probléma megoldása során több gondolkodási művelet is fejleszthető.)

Elsőként elemezzünk egy alsó tagozatos feladatot.

„Ha egy kétjegyű számhoz 1-et adunk, akkor az osztható lesz 2-vel, ha 2-t adunk, akkor osztható 3-mal, ha 3-at adunk , akkor osztható 4-gyel, ha négyet adunk akkor osztható 5-tel, ha 5-öt adunk, akkor osztható lesz 6-tal. Melyik ez a kétjegyű szám?”
(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4. Feladatgyűjtemény, 2.40.)

Megoldás, elemzés:

– Megvizsgáljuk külön-külön, hogy mit jelent a 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal való oszthatóság. (Olyan kétjegyű számot keresünk, ami mindegyiknek többszöröse.)

A megoldásnak ez a lépése feltételezi a következő gondolkodási műveleteket:

analízis:

az egyes részeket önálló egészként vizsgáljuk;

konkretizálás:

2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal való oszthatóság;

általánosítás – specializálás:

Egy természetes szám akkor osztható egy másik természetes számmal, ha megvan benne maradék nélkül – például 5-tel akkor osztható egy szám, ha 0-ra, vagy 5-re végződik a szám.

kiegészítés:

Ha 1-et adunk hozzá, akkor 2-vel, ha 2-t adunk hozzá, akkor 3-mal, stb. lesz osztható a szám.

analógia:

Külön-külön korábban már megvizsgáltuk ezeket az oszthatóságokat.
Mit lehet ebből itt felhasználni?

összefüggések feltárása:

Melyik lehet az a kétjegyű szám, ami 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal is osztható?

– Ha 1-et adunk hozzá, akkor 2-vel, ha 2-t adunk hozzá, akkor 3-mal, ha 3-at akkor 4-gyel, ha 4-et, akkor 5-tel, ha 5-öt akkor 6-tal osztható azt jelenti, hogy ha 1-et elveszek ebből a kétjegyű számból, akkor minden felsorolt feltétel teljesül. Például, ha egy számhoz 2-t adok, akkor osztható lesz 3-mal, azzal egyenértékű, hogy ha elveszek belőle 1-et, akkor az a szám is osztható lesz 3-mal:

$7 + 2 = 9$, 3 osztója 9 – nek; $7 - 1 = 6$, 3 osztója 6 – nak

$16 + 2 = 18$, 3 osztója 18 – nak; $16 - 1 = 15$, 3 osztója 15 – nek.

A tanulóknak nincs ismeretük sem a teljes, sem a redukált maradékrendszerekről, de konkrét példákon megmutatható számukra ez a lényeges ismérv, ami a megoldáshoz elvezet. A matematikai ismeretek zömét alsó tagozatban készítjük elő.

Itt ismét szükséges az analízis, a konkretizálás, az általánosítás és a specializálás, az összehasonlítás, a rendezés, továbbá a lényegkiemelés, az ítéletalkotás és a bizonyítás. (Ezeket az előző vizsgálathoz hasonlóan lehet konkretizálni.)

– Keressük azt a kétjegyű számot, amiből, ha elveszünk 1-et, akkor olyan számot kapunk, ami 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal is osztható.

Ez a szám a $3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 60 + 1 = 61$

A megoldásnak ebben a lépésében az absztrahálás, a szintézis (hiszen a részismereteket egységes egésszé raktuk össze), az általánosítás, az összehasonlítás, a kiegészítés, a rendezés, az összefüggés feltárása, a lényegkiemelés és az ítéletalkotás gondolkodási műveleteket használjuk fel.

– Végül ellenőrizzük, hogy helyes-e a megoldásunk.

$61 + 1 = 62$, osztható 2-vel; $61 + 2 = 63$, osztható 3-mal;

$61 + 3 = 64$, osztható 4-gyel; $61 + 4 = 65$, osztható 5-tel;

$61 + 5 = 66$, osztható 6-tal.

Ezzel a lépéssel a szintézist, az absztrahálást, az ítéletalkotást, és a bizonyítást Fejleszthetjük hatékonyan.

A pszichológiai kutatások egyértelműen kimutatták, hogy a formális gondolkodási műveletek 12-14 éves korban kezdenek kialakulni. Ekkor válhatnak a gondolkodás motorjává. Alsó tagozatban ezeknek a gondolkodási műveleteknek csak a csírái vannak (lehetnek) meg, és azok is csak a jobb képességű gyerekek esetében. A pedagógusnak fejlett kérdéskultúrával,

nagy módszertani kultúráltsággal arra kell törekednie, hogy alsó tagozatban ezen gondolkodási műveletek kialakítását jól előkészítse, megalapozza.
Azt is szem előtt kell tartania, hogy a gyerekekre erősen a képi dominanciájú gondolkodás jellemző, és minden következtetést a konkrét tapasztalatból tudnak csak levezetni.

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy a 10-14 éves korosztályban hogyan fejleszthetők a gondolkodási műveletek.

„Egy tartályt az egyik csap 15 perc, a másik 20 perc alatt tölt meg. A megtelt tartály az alján lévő csap megnyitása után 10 perc alatt ürül ki. Mennyi idő kell az üres tartály megtöltéséhez, ha mindhárom csap nyitva van?”
(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 8. B 36.e))

Megoldás, elemzés:

- Készítsünk táblázatot!

1.	2.	3.
15 perc (be)	20 perc (be)	10 perc (ki)

Ezzel a táblázattal az analízis, a konkretizálás, az összehasonlítás, a rendezés és az ítéletalkotás gondolkodási műveleteket fejleszthetjük.

- Keressünk összefüggéseket!

	1.	2.	3.
1 perc alatt:	$\frac{1}{15}$ rész	$\frac{1}{20}$ rész	$-\frac{1}{10}$ rész
t perc alatt:	$t \cdot \frac{1}{15}$ rész	$t \cdot \frac{1}{20}$ rész	$-t \cdot \frac{1}{10}$ rész

Ebben a lépésben az összehasonlítás, az általánosítás, az összefüggések feltárása, a lényegkiemelés és az ítéletalkotás műveletek kerülnek előtérbe.

A 10 perc alatt ürül ki jelentése: percenként $\frac{1}{10}$ részével csökken a tartályban lévő víz mennyisége, amit $-\frac{1}{10}$ rész művelettel jelölhetünk.

Az 1 percről t percre történő következtetés, pedig az általánosítást és az összehasonlítást feltételezi.

– Írjuk fel a talált összefüggéseket egyenlet formájában!

$$\frac{t}{15} + \frac{t}{20} - \frac{t}{10} = 1$$

Az egyenlet felírása, és megoldása a színtézis, az általánosítás, a kiegészítés, a rendezés, az analógia, és a lényegkiemelés gondolkodási műveletek meglétét kívánja meg.

– Ellenőrizzük a megoldásunk helyességét!

(Szöveges feladat megoldásának ellenőrzése mindig a megoldásnak a szövegbe való helyettesítésével történik.)

Jelen esetben a megoldás: T = 60 perc.

Azaz, ha mindhárom csap nyitva van, akkor 60 perc alatt telik meg az üres tartály.

Az ellenőrzés lépései:

Az első csap 15 perc alatt töltené meg a tartályt, de most 60 percig van nyitva. Ez azt jelenti, hogy 4 ilyen tartályt töltene meg ennyi idő alatt. Hasonlóan a 2. csap 3 ilyen tartályt töltene meg. A két csap együtt 60 perc alatt 7 tartálynyi vizet enged át. A 3. csapon 10 perc alatt ürül ki a tartály, ami azt jelenti, hogy 60 perc alatt 6 tartálynyi vizet enged át a csap.

A két értéket összevetve látható, hogy 7 tartály telne meg, 6 tartálynyi folyna ki. Tehát valóban 1 tartálynyi folyadékot enged át a 3 csap 60 perc alatt.

Ebből a gondolatmenetből látszik, hogy az analízis, a színtézis, a konkretizálás, a specializálás, az összehasonlítás, a kiegészítés, a rendezés, az összefüggések feltárása, az ítéletalkotás, és a bizonyítás gondolkodási műveletek szükségesek az ellenőrzéshez.

A megoldás ilyen elemzése arra is rávilágít, hogy nem sok feladat felszínes megoldása a követendő egy tanórán, hanem inkább kevesebb feladat alaposabb megbeszélése. Így lényegesen több kompetenciaterületet tudunk fejleszteni.

E fejezet utolsó példájaként elemezzünk a gondolkodási műveletek szemszögéből egy geometriai példát a 10. osztályos tananyagból!

„Egy háromszög oldalainak aránya 2 : 3 : 4. Határozzuk meg annak a hozzá hasonló háromszögnek az oldalait, amelynek leghosszabb oldala 5 cm-rel nagyobb a legrövidebbnél! Mi a helyzet abban az esetben, ha az oldalak aránya 2 : 3 : 5 ? ”
(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 10. 4. 78.)

Megoldás, elemzés:

– Ha két háromszög hasonló, akkor azon túl, hogy a megfelelő oldalak aránya megegyezik ($a : a' = b : b' = c : c'$), még az is igaz, hogy az egyik háromszög oldalainak aránya egyenlő a másik háromszög megfelelő oldalainak arányával.
($a : b : c = a' : b' : c'$)
Ennek a felismeréséhez szükséges az analízis, a színtézis, az absztrahálás, a konkretizálás, az általánosítás, az összehasonlítás, az analógia, az összefüggések feltárása, a lényegkiemelés és az ítéletalkotás.

– Ha egy háromszögben az oldalak aránya 2 : 3 : 4, akkor az oldalak egy változó segítségével a következőképpen írhatók fel:
$a = 2x$; $b = 3x$; $c = 4x$
Itt a színtézis, az absztrahálás, a specializálás, az összehasonlítás, az analógia és a transzferálás kerül előtérbe. Ez utóbbinál az arányt, az arányos osztást alkalmazzuk a háromszögek hasonlóságánál.

– A „leghosszabb oldal 5 cm-rel nagyobb a legrövidebbnél” állításnak a matematikai modellje: $2x + 5 = 4x$.
Ennek az egyenletnek a felírásához szükségünk van az általánosítás, a kiegészítés, a rendezés, az analógia és az összefüggések feltárása gondolkodási műveletekre.

– Az $x = \frac{5}{2}$ – ből meghatározhatjuk a keresett háromszög oldalait:
$a = 2x = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$ (cm); $b = 3x = 3 \cdot \frac{5}{2} = 7{,}5$ (cm);
$c = 4x = 4 \cdot \frac{5}{2} = 10$ (cm)
Ebben a lépésben a konkretizálás, az összehasonlítás, az összefüggések feltárása gondolkodási műveleteket használtuk fel.

– A feladat megoldásának ellenőrzésekor az ítéletalkotás, a bizonyításra való képesség, és a rendezés gondolkodási műveleteket mozgósítjuk.

A feladat másik részének megoldásakor ugyanígy járunk el, csak az ellenőrzéskor egészen más probléma merül fel, mint az előbbi esetben.

A feladat második részénél ($a : b : c = 2 : 3 : 5$) a megoldás:

$$a = \frac{10}{3}\ \text{cm}, \qquad b = 5\ \text{cm}, \qquad c = \frac{25}{3}\ \text{cm}.$$

Ha az összehasonlító, a rendező, az ítéletalkotó és a bizonyító képességünk elég fejlett, akkor rájövünk arra, hogy: $\frac{10}{3}$ cm + 5 cm = $\frac{25}{3}$ cm, ami éppen megegyezik a harmadik oldallal. Tehát ebben az esetben, ilyen arányok mellett nincs megoldása a feladatnak. (Nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.)

Mindhárom korosztály feladatainak megoldásaiból leszűrhetjük, hogy a megoldás lépéseihez – valamilyen szinten – elengedhetetlen a gondolkodási műveletek megléte, továbbá az, hogy egy feladattal nem csak egy gondolkodási művelet fejleszthető, mérhető, hanem a gondolkodási műveletek mindegyike, sőt egy feladaton belüli megoldási lépések is szükségessé tehetik a gondolkodási műveletek sokaságát. Ha ezek nincsenek meg, vagy kevésbé fejlettek, akkor sem a megértés, sem a problémamegoldás nem megy önállóan zökkenőmentesen, csak erős külső (tanári) segítséggel.

Kulcsszavak

gondolkodási műveletek

analízis,

szintézis,

absztrahálás,

konkretizálás,

általánosítás,

specializálás,

összehasonlítás, kiegészítés,

rendezés,

analógia,

összefüggések feltárása,

lényegkiemelés,

ítéletalkotás,

fogalomalkotás,

bizonyítás,

transzferálás.

probléma megoldási stratégiák

Kérdések, feladatok:

1) Sorolja fel az egyes gondolkodási műveletek jellemzőit!
2) Válasszon a relációk, függvények, sorozatok témakörből egy feladatot, és elemezze – bemutatott módon – a gondolkodási műveletek szemszögéből!
3) Elemezze, hogy az ítéletalkotás – mint összetett gondolkodási művelet – milyen egyszerűbb gondolkodási műveletek meglétét feltételezi! Mutassa be elgondolását egy-egy algebrai, geometriai, és számelméleti feladaton keresztül!
4) A szöveges feladatok megoldása és a geometriai szerkesztések, bizonyítások során mely gondolkodási műveletek fordulnak elő leggyakrabban? Elemezzen ilyen feladatokat!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
   Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010
3. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4. Feladatgyűjtemény
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010 Műszaki Kiadó, Budapest, 2003
4. Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás
   Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984

Ajánlott irodalom:

Kelemen László: Pedagógiai Pszichológia
Tankönyvkiadó, Budapest, 1981

Pólya György: A gondolkodás iskolája
Akkord Kiadó, Budapest, 2000

Pólya György: A problémamegoldás iskolája I – II.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1968
Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája
Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005

V. A kreatív személyiségtulajdonságok

Korábban említettük, hogy a magyar matematikatanítás fő hibájának azt róják fel, hogy nem a gyakorlatban alkalmazható tudást nyújt a tanulóknak, hanem a lexikális tudás átadása a domináns. Ezt részben igazolja a PISA – vizsgálat 2000 című könyvben megjelent elemzés.

„A magyar diákok legmagasabban az átlag felett egy olyan matematikai feladatot oldottak meg, amely közel állt a hazai iskolai gyakorlathoz: a megfelelő síkidomot kellett hozzárendelni a kérdés szövegében olvasható részletes geometriai leíráshoz. Ezt a feladatot nem egyszerűen jól, hanem valamennyi résztvevő ország diákjai között a legjobban oldották meg tanulóink."

(Vári Péter: PISA – vizsgálat 2000, Műszaki Kiadó, Budapest, 2003)

Ez valójában az eredményes tanulást, ezzel együtt az eredményes tanítást is mutatja. Ugyanis tanulóink abban nyújtották a legjobb teljesítményt, amit tanultak.

A következő megállapítás pedig arra világít rá, hogy nem feltétlenül csak a lexikális tudást fejlesztik pedagógusaink tanítványaikban, hanem sok egyéb kompetenciát is.

„Az igazi, kellemes meglepetést egy kreatív, térlátást és logikai készséget egyszerre igénylő feladat jó eredményei jelentették. A magyar diákok a feladat öt kérdéséből négyben 5-8 %-kal múlták felül az OECD-országok átlagát."

Ez nem azt jelenti, hogy minden rendben van a matematikaoktatásunkkal, – hiszen tudvalévő, hogy igencsak sok gond van az értő olvasás és a problémamegoldás terén – de vannak olyan jelek, amik azt mutatják, hogy néhány területen még pontosabb, tervszerűbb és hatékonyabb oktató – nevelő munka szükséges.

A kreativitás területén mutatott viszonylag jó eredményre építve még további erőfeszítés szükséges e kompetencia kialakításában, fejlesztésében.

Azért tartottuk fontosnak, hogy a PISA-felmérés eredményeiből idézzünk, mert matematikatanításunk egyik legfontosabb kompetenciája a kreatív személyiségtulajdonságok kialakulása. Ez az a terület, amely feltételezi a többi kompetencia meglétét, ugyanakkor alapja is azok fejlesztésének.

A kreatív szó eredete a latin *creare* szó, amelynek jelentése: nemzeni, alkotni, szülni, megteremteni. A kreativitás – azaz teremtőképesség, alkotóképesség – olyan folyamat, dinamikus „dolog", amely saját magát fejleszti és bontakoztatja ki, amely már eredetét és célját is önmagában rejti.

A kreativitás szó éppolyan régi, mint maga az emberiség. Már az ókori feljegyzésekben is találunk utalásokat a kreativitás feltűnő jegyeinek magyarázatára.

Az alkotó gondolkodásnak óriási társadalomformáló ereje van. A tudomány, a tudományos tevékenység közvetlen termelőerővé válik. Ebben a folyamatban, azaz az emberi életet jobbító cselekvéssorozatban bizonyos területen – bizonyos szinten – mindenki alkotó. Mindenki, és nem csak a tudósok, a felfedezők, a lángelmék. Vannak olyan emberi produktomok, amelyek társadalmilag újak, azaz minden ember számára az újdonság erejével hatnak, s ezek idővel előreviszik a társadalom fejlődését, s vannak olyanok, amelyek csak az alkotó ember számára újak, de valahol, valaki korábban már felismerte, megteremtette, megszerkesztette, kitalálta az adott produktomot. Pszichológiai szempontból nem szabad különbséget tenni a két alkotó tevékenység között, ha a társadalom fejlődésére gyakorolt hatásukban óriási is a különbség közöttük. Az iskolai oktatásnak sem lehet az a célja, hogy minden gyerek tudós, feltaláló, felfedező legyen, – ezt nem is tudja megvalósítani – hanem sokkal inkább az, hogy minden tanulóból kihozzuk – személyisége fejlesztésével – azt a maximumot, amellyel képes lesz – bármilyen szintű – alkotó tevékenységet folytatni.

Ha az egyén olyan tulajdonságokkal rendelkezik, amelyek segítségével képes tevékenysége tárgyai között olyan kapcsolatokat teremteni, amelyek túlmutatnak korábbi ismeretein, tapasztalatain, amelyek lényegesen megváltoztatják ezekről a tárgyakról alkotott ismeretrendszerét, a tárgyakkal kapcsolatos tevékenységét, s amelyek lehetővé teszik új produktumok létrehozását. Az ilyen pszichés tulajdonságok összességét kreatív személyiségtulajdonságoknak nevezzük, s magát a tevékenységet kreativitásnak.

Mi a matematikaoktatásban minden olyan tevékenységet kreatívnak tekintünk, amely nem pusztán reproduktív (utánzás útján történő) feladatmegoldás, amely a tanuló számára új ismeret (tétel, definíció, algoritmus) önálló elsajátítását eredményezi.

Kreatív személyiségtulajdonságok:

- problémaérzékenység,
- ötletgazdagság,
- hajlékonyság,
- rugalmasság,
- könnyedség,
- eredetiség,
- kidolgozottság,
- újrafogalmazás,
- kiterjesztés,
- transzferálás.

Vizsgáljuk meg, hogy matematikaórán hogyan mérhetők, hogyan fejleszthetők ezek a tulajdonságok!

Mint korábban – a problémamegoldásnál – írtuk:

Az ismeretlennel való találkozás, egy fogalom kialakítása, egy feladat megoldása nem biztos, hogy probléma a tanuló számára. Ennek okai a következők lehetnek:

- Nincs meg a szükséges érdekeltség. Hiányzik a motiváció, a tanuló nem akarja megoldani az adott problémát.
- A tanuló ismeretei lényegesen magasabb szintűek, mint amit a feladat megoldása elvár tőlük. Ekkor jelentkezik az unalom a tanulók munkájában.
- A feladat megoldásához lényegesen magasabb szintű ismeretek szükségesek, mint amikkel a tanuló rendelkezik. Ekkor a tanuló nem érti a kérdést, a feladat elveszti problémajellegét, érdektelenné válik, kikerül az egyén érdeklődési köréből.

A problémát akkor tekintjük megoldottnak, ha rábukkanunk arra a tevékenységi formára, amellyel a célunk elérhető. (Természetesen csak akkor, ha a tevékenységet magát is végre tudjuk hajtani – különben ez újabb problémát jelent.)

Sokszor nehezebb egy feladatban a probléma meglátása, mint a probléma megoldása. (Például az arányossági feladatoknál a tanulók nagy részének nehezebb eldönteni, hogy egyenes, vagy fordított arányosság van-e az adatok között, esetleg egyik sem, mint – miután eldőlt a fenti kérdés – kiszámítani az eredményt.)

Ha képesek vagyunk egy feladatban az adatokat, az összefüggéseket úgy boncolgatni, hogy a probléma „előbukkan”, megértjük, hogy mit kérdez a feladat, s hajlandóságunk van arra, hogy válaszoljunk a feltett kérdésekre (azaz megoldjuk a problémát), vagy az adatok alapján kérdéseket tudunk konstruálni (azaz feladatot szerkeszteni), akkor ezt a képességet *problémaérzékenységnek* nevezzük.
(Lásd a problémamegoldásra való képesség kompetenciánál.)

Problémaérzékenység

a) Mind írásbeli, mind szóbeli munka alapján mérhető a tanulók problémaérzékenysége. Témazáró mérőlapon, röpdolgozatban, házi feladatban megvizsgáljuk, – az eredménytől függetlenül – hogy
   - van-e értékelhető a tanuló munkájában,
   - megfogta-e a kérdés lényegét, az adott eredmény, részeredmény a megoldás irányába mutat-e,
   - csak „látszatmunka” (a művelet ad hoc módon való végzése) olvasható ki munkájából, vagy gondolkodás útján kapott eredmény.
b) Szóban – akár egyéni felelés, akár korrepetálás, szakkör formájában – arról kaphatunk információkat, hogy
   - milyen kérdéseket tesz fel (saját magának) a feladat megoldása során,
   - egy megoldási útról mikor veszi észre, hogy az zsákutca,
   - a többféle lehetőség közül mikor veszi észre a jó megoldáshoz vezető utat, utakat,
   - az adatok közül ki tudja-e szűrni a feleslegeset, vagy minden megadott értékkel dolgozni akar,
   - mennyire tudja lekötni a feladat, milyen a tanuló érdeklődése (csak a tanár kedvéért dolgozik, vagy ténylegesen érdekli a probléma).

A *problémaérzékenység fejlesztése* e kérdések pozitív megválaszolásával történhet. A tanuló problémaérzékenysége önmagától nem alakul ki. Ha nem irányítjuk tevékenységét, munkája e téren felszínes lesz, az adatok közti összefüggést nem fogja meglátni, s idővel az egész munka érdektelenségbe, unalomba csap át, a tanuló problémaérzékenysége eltűnik.

Ötletgazdagság

A kreatív egyén olyan képessége, amellyel a szükséges alapismeretek birtokában a problémák meglátásához és megoldásához ötleteket tud felvonultatni.

Ötlet: olyan eljárás, tevékenységforma, összefüggés felismerése, amely esetleg közelebb vihet a probléma megoldásához, az ismeretek új rendszeréhez, kapcsolatához.

Nem biztos, hogy minden ötlet használható. Ha az egyén nem rendelkezik a szükséges ismeretek rendszerével, akkor az ötletek felvonultatása sötétben való tapogatózás. Viszont a használhatatlan ötlet is többet ér az ötletnélküliségnél, hiszen az ötletek „kipróbálása", azaz az adott kapcsolatrendszerbe való helyezése egyben tanulás is, míg az ötletnélküliség a gondolkodás hiányát mutatja.

Az ötlet – s ezen túl az ötletgazdagság – alapja a heurisztikának, a felfedező tanulásnak.

Az ötletgazdagság mérése mind szóban, mind írásban történhet. Például ötletgazdag az a tanuló, aki a következő feladatra – a szokvány sorozatokra vonatkozó ismereteken túl – több megoldási ötlettel rendelkezik.

Mennyi az összes kétjegyű szám összege?

– Számtani sorozatokra vonatkozó ismeretekkel való megoldás:

  $a_1 = 10;\qquad a_{99} = 99;\qquad S_n = ?$

– Kombinatorikai ismeretekkel való megoldás. (Melyik helyiértéken, melyik számjegy hányszor fordul elő, s mennyi ezek valódi értékének összege.

– Az úgynevezett Gauss-féle megoldás:

  $10 + 99 = 109;\qquad 11 + 98 = 109;\qquad \ldots$

  Ez az összeg 45 – ször fordul elő.

Mérhető az ötletgazdagság a szabályjátékokkal, sorozatokkal is. Például:

Folytasd a sorozatot: 1; 2; 4; . . . !

Lehet a megoldásokat a szorzás, a hatványozás, a különbség műveleteihez kapcsolni, sőt a kombinatorikához is.

Az adott tulajdonságú ponthalmazok keresése síkban és térben – akár eszközzel, akár eszköz nélkül – szépen mutatja, hogy a tanuló ötletgazdag, vagy sem. Az eszközzel való

dolgoztatás nagymértékben segíti az ötletgazdagság kibontakoztatását. Az ilyen tipusú feladatokkal nemcsak mérhető, hanem fejleszthető is az ötletgazdagság.
A tanulók ugyanis önmaguktól nem lesznek ötletgazdagok sem. A tanárnak sok jó példával, a feladatok megoldásánál felvonultatott hasznos ötletek sokaságával kell kialakítani a tanulókban ezt a képességet.

Hajlékonyság – rugalmasság – könnyedség

Szerencsésebb ezt a három tulajdonságot együtt vizsgálni, mint külön-külön elemezni azokat. Ugyanis nagyon szoros az összefüggés közöttük. Kicsit mindegyik magában hordozza, s egyben feltételezi is a másik kettőt.
Akkor mondjuk, hogy az egyént a hajlékonyság és a rugalmasság jellemzi, hogy ha egy probléma megoldásánál képes több megoldási módot felvonultatni, képes többirányú megoldást adni.
Amennyiben ezek a *megoldások minőségileg különbözőek,* – azaz más-más kategóriába tartoznak – akkor az egyén gondolkodását a *rugalmasság* jellemzi. Ha a *megoldások minőségileg nem különbözőek,* akkor a *hajlékonyság* jellemzi a gondolkodást.

Természetesen ezek a kategóriák nem zárják ki egymást, sőt inkább erősítik. Nagy a valószínűsége annak, ha valakinek a gondolkodását a rugalmasság jellemzi, akkor ott már a hajlékonyság is megtalálható, illetve a hajlékonyság előfeltétele lehet a rugalmasságnak, azaz annak, hogy minőségileg más megoldást is próbáljon keresni az egyén.
Példaként vegyük az előző sorozatos feladatot!

Legyen 1; 2; 4; ... egy sorozat első három eleme! Folytasd a sorozatot többféleképpen!
Néhány lehetséges megoldási mód:

a) 1; 2; 4; 8; 16; 32; . . . $a_n = 2^{n-1}$ ($n \geq 1$ természetes szám)

c) $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$; $a_1 = 1$ (rekurzív megadási mód)

d) Az egymást követő elemek különbsége mindig eggyel nő:
1; 2; 4; 7; 11; . . .

e) Az egymást követő elemek különbsége duplázódik:
1; 2; 4; 8; 16; . . .

f) Az egymást követő elemek különbsége rendre 1, illetve 2:
1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; . . .

g) A három elem ciklikusan ismétlődik:

1; 2; 4; 1; 2; 4; 1; 2; 4; ...

Még tovább lehetne folytatni a megadási módokat, de ez a néhány példa elég arra, hogy megmutassuk a hajlékonyság, illetve a rugalmasság jellemzőit.

Minőségileg különböző megoldások: a); c); f).

Azonos minőségen belüli megoldások: a); b), illetve c); d); e).

Tehát minél több a kategóriaváltás, annál rugalmasabb a gondolkodás, minél több az egy kategórián belüli megoldás, annál hajlékonyabb a gondolkodás.

Ha mindezen változások különösebb *nehézség nélkül* mennek végbe, ha egy-egy *sikertelen próbálkozáson hamar túlteszi* magát az egyén, és mással próbálkozik, vagy egy-egy sikeres próbálkozás után *gyorsan jön a következő ötlet,* a következő megoldási mód, akkor az egyén gondolkodását a könnyedség jellemzi. Tehát a könnyedséget a sikeres, vagy sikertelen esetek nagy száma jelenti.

Összevetve a korábban mondottakkal:

E három tulajdonsággal, vagy ezek akármelyikével csak akkor rendelkezhet az egyén, ha jellemző gondolkodására az ötletgazdagság.

Ezen tulajdonságok fejlesztésében is nagy szerepe van a pedagógusnak. Nem szabad megelégednie egy feladat egyetlen megoldásával, hanem törekednie kell a minél többirányú vizsgálódásra, a többféle megoldásra. Ez egyben a divergens gondolkodás alapja is.

Eredetiség

Ezzel a képességgel a dolgokat, a jelenségeket másképpen látja és értékeli a tanuló, mint az emberek többsége.

Az eredetiséget olyan munka fémjelzi, ami legtöbbször sikeres és eltér a szokványostól.
Ebből az is következik, hogy az eredetiség mindig viszonyított képesség, így mérni is nehezebb ezt, mint a többi kreatív személyiségtulajdonságot, ugyanis lényegesen nagyobb populáció szükséges a megállapításához, mint amit az osztálykeretek (20-40 fő) lehetővé tesznek.

A fejlesztésének is gátat szabnak az osztálykeretek. Amíg az osztály többsége – beleértve legtöbbször a pedagógust is – megérti, hogy mit akar az eredeti gyerek mondani, sok idő telik el, s a napi tervezett munkát nem tudják elvégezni. Ráadásul a kreatív tanulók felvetései – felületesen szemlélve – sok tanár és tanuló számára okvetetlenkedésnek tűnnek, így nem is szimpatikusak ezek a felvetések.

Javaslatunk, ha ilyen tanuló felbukkan az osztályban, órakereten kívül hagyjuk kibontakozni képességét, lássuk el olyan feladatokkal, amelyekben ötleteit ki tudja dolgozni, s ezáltal fejleszteni tudja ezirányú képességét.

Kidolgozottság

Az a képesség, amely lehetővé teszi, hogy ötleteinket megvalósítsuk, a probléma megoldásának módját megtervezzük, adott információk birtokában felépítsünk egy struktúrát.

Felületesen szemlélve ez éppen ellentmond a divergens gondolkodásnak, a többirányú vizsgálódásnak, azaz a rugalmasságnak, a hajlékonyságnak, az ötletgazdagságnak, sőt, némiképp az eredetiségnek is. Az ellentmondás látszólagos, mert amikor kidolgozzuk a feladat megoldásának tervét, akkor legtöbbször ott van az alternatív lehetőség is. Konkrétan: mit tudok csinálni akkor, ha ez az út zsákutca, milyen más módon, milyen új kapcsolatok révén lehet ezen kívül az adott problémát megoldani. Másrészt az ötlet is csak akkor értékes, ha az abban foglaltakat végre tudjuk hajtani.

Ez a tulajdonság sem veleszületett a tanulóval. A pedagógusok feladata az, hogy fokozatosan szoktassák rá a tanulókat arra, hogy a „találomra”, véletlenszerűen végzett műveletek helyett a tudatos, tervszerű munkát válasszák. Ezért található a tankönyvek szöveges feladatainál a „Készíts tervet!” felszólítás.

Mivel ez a képesség kisgyermekkortól fejlődik, mérése viszonylag könnyű. Írásban meggyőződhetünk arról, hogy a feladat szövegének megfelelő tervet késztett-e a tanuló, szóbeli feleletnél pedig, indokoltatjuk az egyes lépéseket, amelyekből egyértelműen kiderül, mennyiben tudatos, tervszerű a tanuló munkája.

Újrafogalmazás

Az a képesség, amellyel az egyén a számára ismert anyaghoz közelíti a számára ismeretlent. Az újrafogalmazás többek közt magában foglalja:

– az adatok, a feltételek részletezését,
– a szükséges definíciók, tételek felszínre hozását,
– a feltételek, az adatok közti új kapcsolatok feltárását,
– az analógiát.

Az újrafogalmazás az alapja, az első lépcsőfoka a kreativitás magas fokát jelentő, új feladat konstruálásának.
Pólya György írja:
„A diák matematikai tapasztalata fogyatékos marad, ha sohasem nyílt alkalma megoldani olyan feladatot, amelyet ő maga talált ki. A tanár mutassa meg, hogyan lehet egy, már megoldott feladatból újakat készíteni, s így keltse fel a diákjainak érdeklődését!"
(Pólya György: A gondolkodás iskolája, Gondolat Kiadó, Budapest, 1977)

Az újrafogalmazás jól mérhető a szöveges feladatok megoldása kapcsán, vagy a geometriai szerkesztések, bizonyítások témakörében. Például a köznapi nyelvet miképpen tudja lefordítani a matematika nyelvére a tanuló. (Adatok és kapcsolatok segítségével egyenlet felírása.)
Fejlesztésének fokozatai:

1. Egy feladat megoldása utána megkérdezzük:
   Mit mondhatunk még el a feladatról? Mikor van megoldás, mikor nincs megoldás, mikor, hány megoldás van?
2. Változtatjuk az adatokat úgy, hogy a megoldás módosuljon.
3. Kérjük a megoldás általánosítását.
4. Csak feltételeket, adatokat adunk meg, s a kérdést a tanulónak kell feltennie saját magának, amelyet meg is kell válaszolnia.
5. Feladat készítése.

Természetesen a feladatkészítés csak a matematikával kiemelten foglalkozó tanulóktól várható el, a többieknél megelégedhetünk azzal, hogy úgy formálják át a feladatok szövegét, hogy megértsék annak lényegét.

Kiterjesztés

Szoros kapcsolatban van a korábban említett feladatkészítéssel. *Az egyén olyan képessége, amellyel egy feladat megoldása után meg tudja vizsgálni, hogy milyen más esetben, milyen más adatok, más feltételek mellett érvényes az adott összefüggés, illetve milyen más összefüggés lesz érvényes a megváltoztatott körülmények között.* Például ilyen a síkbeli és térbeli geometriai feladatok analógiája.

Transzferálás

Valamely ismeretanyag alkalmazása olyan témaköröknél, olyan tárgyaknál, vagy a gyakorlati életben, amelyek látszólag sokban különböznek az adott ismeretanyagtól. A korábbi példákkal ezt is alá tudjuk támasztani.

A matematikán belül majdnem minden témakör összefügg majdnem mindegyikkel.

Például:

- kombinatorika – sorozatok – halmazok,
- halmazműveletek – geometriai transzformációk,
- egyenletek – műveleti tulajdonságuk.

stb.

A matematikán kívül:

- fizika (egyenletek, függvények – mozgások),
- kémia (százalékszámítás – oldószerek, oldatok),
- technika (arány, arányos osztás – áttételek).

stb.

Végigtekintve a kreatív személyiségtulajdonságokon, látható, hogy nagyon összetett fogalomról van szó. Nem jelenthetjük ki egyértelműen, hogy valaki kreatív, vagy nem az, hanem inkább azt mondhatjuk, hogy bizonyos tulajdonságokkal ezek közül rendelkezik, vagy sem az egyén. Minél többel rendelkezik, annál kreatívabb.

Végül nézzük, hogy milyen stratégiák használhatók eredményesen egy-egy tanórán a kreatív személyiségtulajdonságok kialakításában!

- szembesítés kétértelműségekkel és bizonytalanságokkal,
- ismert jelenségek idegenné, idegenek ismertté tétele analógiával,
- ugyanannak a dolognak több szempontból való vizsgálata,
- produktív kérdések felvetése, amelyek az információk más oldalról való vizsgálatát ösztönzik,
- hiányzó elemek felkutatása, kiegészítése,
- rendezési lehetőségek keresése,
- látszólag különböző, nem összefüggő elemek, ismeretek párhuzamba állítása,
- „titokzatosságok", „rejtélyek", „matematikai furcsaságok" felkutatása, vizsgálata.

Ezek után az értelmezések után nézzük, hogy alsó tagozaton, felső tagozaton és középiskolában milyen példákon keresztül, milyen tanári kérdéskultúrával, milyen munkaformákkal, módszerekkel, hogyan fejleszthetők az itt felsorolt kreatív személyiségtulajdonságok!

„ A 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23 számok közül alkalmasan válassz ki kilenc különbözőt, majd helyezd el őket egy 3 x 3 – as „bűvös négyzetben” úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban 51 legyen a számok összege.”
(TIT Kalmár László Matematika Verseny, Országos Döntő, 2010. 4. osztály)

Megoldás, elemzés:

- Ahhoz, hogy minden sorban, oszlopban és átlóban 51 legyen az összeg az szükséges, hogy a kiválasztott számok összege $3 \cdot 51 = 153$ legyen.
  Valójában ez az alapja a megoldásnak. Ha ezt felfedezi a tanuló, akkor jellemző rá a problémaérzékenység, az ötletgazdagság, a rugalmasság, a könnyedség, a kidolgozottság, az újrafogalmazás és a kiterjesztés.

- Úgy helyezhetjük el a számokat a bűvös négyzetben, hogy a középső kis négyzetben a három szám számtani közepe legyen. Ebben az esetben ez a szám a 17. Ennek megállapítása szintén komoly teljesítményt követel a tanulótól. Feltételezi a problémaérzékenység, az ötletgazdagság, az eredetiség, a kidolgozottság, az újrafogalmazás és a transzferálás meglétét.
  (Elég csak arra gondolnunk, hogy a számtani közép ismeretét kell alkalmaznia 4. osztályban a feladat megoldásához.)

- Többféleképpen választhatunk ki 9 számot a felsoroltakból úgy, hogy a feltételek teljesüljenek.
  Néhány ilyen kiválasztás: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21; 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22; stb.
  Ahhoz, hogy erre rájöjjön a tanuló az szükséges, hogy rendelkezzen a problémaérzékenység, az ötletgazdagság, a rugalmasság, a hajlékonyság, a könnyedség, a kidolgozottság, az újrafogalmazás és a kiterjesztés képességével.
- Egy helyes számkilences kiválasztása után el tudja rendezni a számokat – a fentiek figyelembevételével – a bűvös négyzetben.
  A megoldásnak ez a lépése ismét egy sor képesség meglétét feltételezi.

Nevezetesen: a problémaérzékenység, az ötletgazdagság, a rugalmasság, a hajlékonyság, a könnyedség, a kidolgozottság, a kiterjesztés.

– Egy bűvös négyzet kitöltése után képes más – a feltételeknek megfelelő – bűvös négyzetek kitöltésére is.
  Ha rájön a tanuló arra, hogy egy elrendezésnek a tükrözése és az elforgatása is jó megoldás, továbbá más számkilencesekkel ugyanez elvégezhető, akkor erre a tanulóra valóban jellemző a kreativitás (természetesen a 10 éves korosztálynak megfelelő szinten). Ez a tanuló rendelkezik minden, a kreativitásra jellemző tulajdonsággal.

Meg kell jegyeznünk, hogy a kreatív személyiségtulajdonságok mellett minden korábban (és a későbbiekben) taglalt kompetencia (értő olvasás, problémamegoldás, gondolkodási műveletek, stb.), vagy ezek közül nagyon sok, szükséges a feladat megoldásához.

A következőkben egy felső tagozatos problémát elemzünk a kreativitás szemszögéből.

„Két hordó bizonyos mennyiségű vizet tartalmaz. Ha átöntünk az elsőből a másodikba éppen annyi vizet, mint amennyi már abban van, majd a másodikból az elsőbe pont annyit, mint amennyi abban már van, s végül az elsőből a másodikba éppen annyi vizet, mint amennyi abban már van, akkor mindegyik hordóban 160 liter víz lesz.”
(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 5-6. Feladatgyűjtemény 7.3.20.)

Vegyük észre, hogy a feladat megértése komolyabb problémát jelent, mint a megoldása. Nagyon sok gondolkodási művelet szükséges ahhoz, hogy az értő olvasás készsége érvényesülhessen, viszont az ilyen típusú feladatok megoldásával szépen fejleszthetjük a tanulóink kreativitását.

Megoldás, elemzés:

– Megoldhatjuk a problémát direkt módszerrel, az utasítások egyszerű követésével, két változó bevezetésével:

	1. hordó (l)	2. hordó (l)
Alaphelyzet	x	y
1. öntés	$x-y$	$2y$
2. öntés	$2(x-y)$	$2y-(x-y)$
3. öntés	$2(x-y)-(3y-x)$	$2(3y-x)$

Innen egy egyenletrendszerrel megoldható a feladat.
(A probléma az, hogy általános iskolában ilyen típusú egyenletrendszer megoldását nem tanítjuk. Tehát, ha a tanuló így próbálná megoldani a feladatot, zsákutcába kerülne, vagy már középiskolai ismeretekkel rendelkezne.)

A feladat ilyenképpen való megoldása viszont feltételezi a problémaérzékenységet, az ötletgazdagságot, a kidolgozottságot, az újrafogalmazást és a transzfert.
Amennyiben zsákutcába kerül a tanuló, és más megoldási stratégiát kell keresnie, az az ötletgazdagság, a rugalmasság, a hajlékonyság, és a könnyedség képességek meglétét is feltételezi.
A hatodik osztályos tanulók gondolatvilágához közelebb áll a másik fajta megoldási mód.
Induljunk ki abból, hogy az utolsó öntés után mindkét hordóban 160 liter víz van.

	1. hordó (l)	2. hordó (l)
3. öntés után	160	160
2. öntés után	240	80
1. öntés után	120	200
Kiindulási helyzet	220	100

Ezzel lényegesen egyszerűbb, a bonyolult egyenletrendszert kiküszöbölő, a tanulók gondolkodásának jobban megfelelő megoldást tudunk kialakítani, és az előző kreatív személyiségtulajdonságokon túl még az eredetiség, a kiterjesztés és a transzfer is jól fejleszthető.

Végül elemezzünk egy középiskolai feladatot a kreatív személyiségtulajdonságok tükrében.

> „Négy pozitív egész szám egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. Határozzuk meg a számokat, ha összegük 26, szorzatuk pedig 880."
> (Matematika feladatgyűjtemény II. 230.)

Megoldás, elemzés:

Ha a hagyományos utat követjük, akkor egy nagyon bonyolult egyenletrendszert kapunk.

$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) = 26$

$a \cdot (a + d) \cdot (a + 2d) \cdot (a + 3d) = 880$

Ez utóbbi egyenlet a-ban olyan negyedfokú, és d-ben olyan harmadfokú egyenletet eredményez, ami meghaladja még egy jó képességű (12. osztályos) tanuló erejét is. Egyébként az egyenletrendszer felírása rutinművelet egy átlagosnál gyengébb képességű, képzettségű tanuló számára is – így viszonylag kevés kompetenciaterületet fejleszt – viszont az egyenletrendszer megoldása olyan „praktikákat" feltételez, amivel még egy jó képességű tanuló sem rendelkezik. (Maga a megoldás nagyon sok kreatív személyiségtulajdonságot fejlesztene.)

Mivel – feltételezésünk szerint – zsákutcába jutott a tanuló, előhívja a problémaérzékenység, az ötletgazdagság, a hajlékonyság, a rugalmasság, a könnyedség, az újrafogalmazás, a kiterjesztés, és főleg a transzfer képességét a megoldáshoz, (ha rendelkezik ezekkel).

A megoldás döntő láncszeme a „négy pozitív egész szám". Ennek észrevétele problémaérzékenységet jelent; „összegük 26, szorzatuk 880"– ból megalkotni, egy jó megoldási tervet, pedig ötletgazdagságot, rugalmasságot, hajlékonyságot, könnyedséget, újrafogalmazást, kiterjesztést és transzfert.

Négy olyan pozitív egész számot kell keresnünk, amelyek között a különbség ugyanannyi (számtani sorozat), összegük 26, és szorzatuk 880.

Ez utóbbiból jöhet az az ötlet, hogy 26-ot pozitív egész számok összegére, 880-at pedig ugyanezen négy szám szorzatára bontjuk. Összegük 26, szorzatuk 880.

$$880 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$$

Ebből a hat tényezőből kell négy olyan természetes számot képeznünk, amelyek összege 26, és bármelyikből kivonva az őt megelőzőt, a különbség mindig ugyanakkora. Adódik a megoldás.

A négy szám: 2, 5, 8, 11. Ez a számnégyes mind a négy feltételnek megfelel. (Pozitív egész számok, számtani sorozat négy tagja. Összegük 26, szorzatuk 880.)

Ez arra is rávilágít, hogy nem mindig zárt formában (például egyenlettel) kell keresnünk a megoldást.

Mint említettük korábban, szinte az összes kreatív személyiségtulajdonságot tudjuk fejleszteni egy ilyen feladattal, de leginkább az ötletgazdagságot, az újrafogalmazást és a transzfert.

A három elemzett feladat arra is rávilágít, hogy a kreatív személyiségtulajdonságok fejlettsége más és más a különböző korosztályokban, de minden esetben nélkülözhetetlen a problémák megoldásához. Itt jelentkezik a tanár felelőssége abban, hogy korosztálynak, érdeklődési körnek megfelelő tananyaggal, munkaformával, módszerrel, kérdéskultúrával a lehető legnagyobb mértékben fejlessze tanulóit ezen kompetenciaterületen is.

Kulcsszavak

kreativítás

problémaérzékenység

ötletgazdagság

hajlékonyság

rugalmasság,

könnyedség

eredetiség

kidolgozottság

újrafogalmazás

kiterjesztés

transzferálás

feladatok elemzése

Kérdések, feladatok:

1) Határozza meg, hogy mit értünk kreativitáson, és sorolja fel az ismérveit!
2) Mi a különbség a hajlékonyság és a rugalmasság között?
3) Hogyan nyilvánul meg a tanuló munkájában az eredetiség?
4) Keressen a Hajdu-féle tankönyvcsaládban olyan feladatokat (5-12. osztály), amelyekkel a problémaérzékenység, a könnyedség és az újrafogalmazás leginkább fejleszthető.
5) Állítson össze a 10. osztályos tanulók számára egy tetszőleges témakörben olyan feladatsort, amellyel a legtöbb kreatív személyiségtulajdonságot fejleszteni tudja! Elemezze ezeket a feladatokat a fejezetben leírt módon!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
   Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Kkein Sándor: A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata
   Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980
3. Erika Landau: A kreativitás pszichológiája
   Tankönyvkiadó, Budapest, 1976
4. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 5-12. osztály számára
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Ajánlott irodalom:

Kürti Jarmila: Kreativitásfejlesztés középiskolás korban
Tankönyvkiadó, Budapest, 1982

Kürti Istvánné: Tervek, hipotézisek, stratégiák a 9-14 éves gyerekek gondolkodásában
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982

Vári Péter: PISA – vizsgálat 2000
Műszaki Kiadó, Budapest, 2003

Bedő László: Matematika feladatgyűjtemény II.
Tankönyvkiadó, Budapeset, 1989

VI. Algoritmikus gondolkodásra való képesség

Az algoritmikus gondolkodás egy folyamat egyes lépéseinek olyan sorozatát jelenti, amelyben lényeges szerepet játszik az ezeknek a lépéseknek sorrendje. Ha ez a sorrend nem optimális, azaz nem egymásra épülő, vagy egy mást feltételező és követő lépések sorozata, akkor célunkat vagy nem érjük el, vagy csak nagyon körülményesen nagy energiaráfordítással, a szükségesnél lényegesen hosszabb idő alatt valósíthatjuk meg.

Egy cselekvéssorozat megtervezése, a megtervezett cselekvéssorozat végrehajtása, azaz az algoritmikus gondolkodás, a mindennapi életünk egyik legfontosabb velejárója. Tudnunk kell megtervezni a napi munkánkat, tudnunk kell, hogy *mit, mikor, milyen sorrendben és miért csinálunk.* Ha gondolkodásunk csapongó, nem követ valamilyen rendszert, akkor a teljesítményünk hatásfoka is – ennek megfelelően – kicsi lesz. Ebből következik, hogy meg kell tanítanunk a tanulókat a céltudatos, tervszerű munkára, hiszen éppúgy, mint a többi pszichés tulajdonság, az algoritmikus gondolkodás képessége sem veleszületett, nem alakul ki spontán módon a tanulóban, hanem hosszú folyamatban, sokszor ismételt, a felnőtt által irányított cselekvéssorozatokban alakul ki. Ez igaz a tanulási folyamatra éppúgy, mint a köznapi élet gyakorlatára.

A matematika – éppen a tárgy jellege miatt – nagymértékben hozzájárulhat ezen kompetencia kialakulásához, fejlődéséhez. Gondoljunk az egyenletek megoldására, (arra, hogy hogyan követik egymást az azonos, illetve az ekvivalens átalakítások), a szerkesztések, a bizonyítások egymást követő lépéseire, a szöveges feladatok megoldásának fázisaira, stb. Ezeknek a lépéseknek megvan egy jól meghatározott sorrendje, amitől, ha eltérünk nem tudjuk megoldani a feladatot, vagy hibás megoldásra jutunk. Ugyanez a helyzet egy zárójeleket is tartalmazó műveletsor műveleti sorrendjével is.
Például -3^2 és $(-3)^2$ értékeket gyakran keverik a tanulók, mivel a szorzás és a hatványozás műveletek sorrendje nem tisztázott számukra.

Az algoritmikus gondolkodásra való képességet is fejleszthetjük minden témakörnél. Példaként nézzük egy szerkesztési feladat algoritmusát:

1) Felvesszük az adatokat.
2) Vázlatot készítünk. (Megszerkesztettnek feltételezzük a feladatot.) Berajzoljuk az ábrába az ismert adatokat.
3) Megkeressük a vázlaton az adatok közti összefüggéseket.
4) Elkészítjük a szerkesztés tervét, megszámozzuk, sorrendezzük az egyes szerkesztési lépéseket. (Ez egy újabb algoritmust jelent.)
5) Elvégezzük a szerkesztést.
6) Bizonyítjuk, hogy a kívánt alakzatot szerkesztettük meg.
7) Diszkussziót végzünk. (Mit mondhatunk még el a feladatról? Mikor van, mikor nincs megoldás, mikor hány különböző megoldás van?)

Sok tanár – éppen az időhiány miatt – több lépést kihagy ebből az algoritmusból, amivel elköveti azt a hibát, hogy az egymásra épülő fázisok elve nem érvényesül, így a szerkesztés hibás, vagy hiányos lesz, és a tanulók algoritmikus gondolkodásának fejlesztése is csorbát szenved.

A kombinatorikus feladatok megoldásába is rendszert kell vinni. Példaként nézzük a következő feladatot:

Hány olyan négyjegyű szám van, amelynek két szélső és két középső számjegye megegyezik?

Ha elkezdenénk felírni az összes ilyen számot, több hibát is elkövethetnénk (nem írjuk fel az összes számot, egyet többször is írunk, a feltételnek nem megfelelőt is a számok közé sorolunk stb.), illetve nagyon sok időbe tellene. Viszont, ha alkalmazzuk a következő algoritmust, akkor röviden, tömören, céltudatosan teljes megoldást tudunk adni.

1001; 1111; 1221; … 1991 — 10 db ilyen szám van

2002; 2112; 2222; … 2992 — 10 db ilyen szám van

. . . . és így tovább,

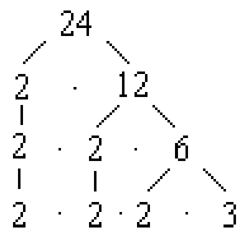
. .

9009; 9119; 9229; … 9999 — 10 db ilyen szám van

Összesen: 90 db ilyen szám van.

A számelmélet témakörben is jól lehet alkalmazni, illetve fejleszteni az algoritmikus gondolkodást.

Például: határozzuk meg 24 összes pozitív osztóinak számát.



Itt a gráf élei jelentik az algoritmus egyes lépéseit. Az utolsó sor alapján már könnyen felírható az összes osztó és meghatározható 24 összes osztóinak száma is: 1; 2; 3; 4; 6, 8; 12; 24. Összesen 8 pozitív osztója van a 24-nek. (Azt kell megvizsgálnunk, hogy az 1, 2, 2, 2, 3 számokból hány egytényezős, kéttényezős, háromtényezős, négytényezős és öttényezős szorzatot tudunk képezni.

Ugyanez a feladat megoldható osztópárok keresésével is:

$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

Itt a tényezők száma közvetlenül adja az osztók számát.

Az algoritmikus gondolkodás kialakítását, ami a mindennapi tudatos cselekvésünket irányítja, nem lehet elég korán kezdeni. Minél alacsonyabb korban alakul ki a gyerekben ez a képesség, annál inkább sajátjává válik, és annál inkább ennek megfelelően fogja meghatározni napirendjeit.

A következő feladat alsó tagozatban adható. Az úgynevezett „betűszámtan” nagyon sok kompetenciát fejleszt (értő olvasás, problémamegoldás, kreativitás, kombinatorikus gondolkodás, függvényszerű gondolkodásmód), de különösen alkalmas arra, hogy az algoritmikus gondolkodást fejlesszük vele.

„Melyik betű mely számjegyet jelenthet, ha azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek?”

```
   A E E K
 + K E E A
 A A T T M
```

(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4. Feladatgyűjtemény)

A megoldás lépésein keresztül mutatjuk meg a megoldás algoritmusát.

1) A feladat mellé vegyünk fel egy olyan ábrát, amelyben a betűk helyét kipontozzuk, és ezt az ábrát fogjuk kitölteni lépésenként az összefüggéseknek megfelelően.

```
   A E E K        . . . .
 + K E E A      + . . . .
 A A T T M      . . . . .
```

1) Mivel az ezresek összeadása révén tízezres is lesz az összegben, így A = 1 teljesül. (Két egyjegyű szám összege maximum 9 + 9 = 18, vagy ebben az esetben 9 + 8 = 17 lehet.)

3) A K értéke csak 9 lehet, mert 1 + 9 esetén lehet csak „ helyiérték átlépés”, és ez is úgy, hogy az E + E szintén nagyobb kell, hogy legyen 10-nél. (Az 1 + 8 esetén az E + E-ből adódó 1 ezressel 10 lenne az összeg, de ez ellentmond a 2) lépésnek.)

   Írjuk le az eddig ismert számokat!

```
   1 . . 9
 + 9 . . 1
  1 1 . . 0
```

4) Az egyesek összegéből: 9 + 1 = 10 következik, hogy M = 0.

5) A 3) – as lépés szerint E + E > 10, ez háromféleképpen érhető el:

$6 + 6 = 12, \quad 7 + 7 = 14, \quad 8 + 8 = 16$

(A 9 + 9 = 18 már ellentmondáshoz vezet.)

6) Az 5) – nek megfelelő számpárokat beírva az ábra üres helyeire a következő megoldást kapjuk:

$$\begin{array}{r} 1669 \\ +\ 9661 \\ \hline 11330 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1779 \\ +\ 9771 \\ \hline 11550 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1889 \\ +\ 9881 \\ \hline 11770 \end{array}$$

7) Az összeadások elvégzése egyben ellenőrzés is.

Ha az algoritmusnak ezen lépéseit betartatjuk a tanulóval, akkor nem „vakon”, találomra, nem véletlenszerűen próbálgatással oldja meg a feladatot, hanem kialakul benne olyan egy kompetencia, amely más hasonló feladat megoldására is képessé teszi, továbbá kihat a gyakorlati életben való eligazodásra is.

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy egy „bizonyításos” feladat megoldását hogyan lehet az algoritmikus gondolkodás fejlesztésének szolgálatába állítani!

Két mozgó test $v_1 = 75\ \frac{km}{h}$, illetve $v_2 = 50\ \frac{km}{h}$ egyenletes sebességgel mozog *A* és *B* pont között oda-vissza. A testek azonos időben indulnak az *A* és *B* pontból. Bizonyítsuk be, hogy a két test sohasem találkozik az út felénél, ha a két pont távolsága 150 km!
(Matematika összefoglaló feladatgyűjtemény alapján.)

A megoldás lépései egyben az algoritmus lépéseit is mutatják.

1) Gyűjtsük ki az adatokat!

Válasz: $v_1 = 75\ \frac{km}{h}$, $v_2 = 50\ \frac{km}{h}$, s = 150 km

2) Mit állítunk? Mit kell bizonyítani?

Válasz: Nem találkoznak sohasem az út felénél.

2) Keressük meg a bizonyításhoz szükséges összefüggéseket!

Válasz: $s = v \cdot t$ (út, idő, sebesség közti összefüggés)

Ha egyszerre indulnak, akkor bármelyik találkozásukig azonos ideig haladnak.

3) Mit jelent az, – a megtett utat illetően – hogy az út felénél találkoznak?

Válasz: Bármelyik test valahányszor 150 km-t megtesz, plusz még 75 km-t halad.

4) Hogyan írható fel matematikai jelekkel?

Válasz: $s = n \cdot 150 + 75$

5) Hogyan írható fel ez a mozgási időtartamok egyenlősége?

Válasz: A $t = \frac{s}{v}$ képlet alapján

$$\frac{n \cdot 150 + 75}{75} = \frac{m \cdot 150 + 75}{50}$$

6) Mit jelent a „matematika nyelvén” az, hogy nem találkozhatnak középen?

Válasz: Ennek az egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán.

7) Oldjuk meg az egyenletet, azaz fejezzük ki az egyik változó segítségével a másikat!

Válasz: $2n + 1 = 3m + \frac{3}{2}$

$$2n = 3m + \frac{1}{2}$$

Ebből látszik, hogy n értéke nem lehet egész szám, hiszen egy olyan számmal egyenlő, amely egy egész és egy egész alakban nem írható tört összegeként áll elő.

8) Következtetés: mivel azonos idő alatt nem tud egyik test sem olyan utat megtenni, hogy a teljes út (a 150 km) többszöröse, plusz a teljes út fele egyenlő legyen, így nem találkozhatnak az út közepén.

Viszont elképzelhető, hogy vannak olyan sebességértékek, amelyek esetén találkozhatnak a testek az út felénél. (Ilyen például a $v_1 = 50\ \frac{km}{h}$, és a $v_2 = 30\ \frac{km}{h}$)

Ha a tanulókat több ilyen feladattal rávezetjük a megoldás lépéseinek sorrendjére, akkor nagy valószínűséggel a gyakorlati életben is megtervezett algoritmus szerint fog tevékenykedni, a következők szerint:

Először megvizsgálja az adott tevékenység (amit teljesíteni kell) feltételeit, összeveti ezeket az elérendő céllal, megvizsgálja az adott feltételek közti összefüggéseket, megtervezi az optimális cselekvési sorrendet, majd végrehajtja azt. Végül azt is meg kell vizsgálnia, hogy valóban ez volt-e az optimális lépéssorozat, hiszen egy adott problémát nagyon sokféleképpen tudunk megoldani.

Mindezekkel azt próbáltuk megmutatni, hogy mindenfajta példán keresztül, megfelelő tanári tervező munkával sikeresen fejleszthetjük az algoritmikus gondolkodás kompetenciáját.

Kulcsszavak

algoritmus

cselekvési lépések sorozata

szöveges feladatok megoldási algoritmusa

szerkesztések algoritmusa

bizonyítások algoritmusa

műveleti sorrend, mint algoritmus

Kérdések, feladatok:

1) Mikor mondjuk, hogy a tanulóra jellemző az algoritmikus gondolkodás?
2) Mondja ki Pitagorasz tételét és bizonyítsa, majd írja le a bizonyítás algoritmusát!
3) Válasszon ki a Hajdu-féle tankönyvcsalád könyveiből egy geometriai szerkesztéses feladatot, és kövesse végig a megoldáson a szerkesztések algoritmusát!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
   Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010
3. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika programok 5-8. osztály számára
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2006

Ajánlott irodalom:

Pólya György: A gondolkodás iskolája
Akkord Kiadó, Budapest, 2000

Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1968

Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája
Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005

VII. A megoldás megtervezésének képessége, tervszerűség, célszerűség

Egy cselekvéssor elvégzésének megtervezése, a tervszerű gondolkodás csak az emberre jellemző sajátosság. *Ez a képesség azt jelenti, hogy képes az egész adatdömpingből, az őt ért rengeteg hatásból, tapasztalatból kiválasztani az adott probléma megoldásához szükségeseket, a feleslegeseket kiszűrni, majd ezen adatok közti összefüggések megkeresése után a megoldás optimális útját meghatározni.*
Minél magasabb szintű ez a képességünk, annál kevesebb energiával, annál tökéletesebben tudjuk a kívánt tevékenységet végrehajtani.

Nagyon sokszor tapasztalja a pedagógus, hogy jól old meg a tanuló egy feladatot, de a megoldását nem tudja megindokolni, vagy rosszul indokol. Ez arra vezethető vissza, hogy a feladat adataival véletlenszerűen végez műveleteteket, és esetleg az esetek egy részében ez helyes eredményre vezet. Az ilyen hibák kiküszöbölése, valamint a matematikai és nem matematikai tevékenységek tudatos végrehajtása miatt szükséges ennek a területnek a fejlesztése. Minél magasabb szintű ez a képességünk, annál kevesebb energiával, annál tökéletesebben és kevesebb időráfordítással tudjuk munkánkat végezni. A céltalan próbálgatások, a sok zsákutca, a sok téves út a tetemes időveszteség mellett azt is eredményezheti, hogy tanítványaink nem lesznek motiváltak az adott probléma megoldásában. A tanulóknál ennek a képességnek a hiánya az úgynevezett látszatmunkában is jelentkezik. Ez azt jelenti, hogy az adatok között felír valamilyen jelentéktelen összefüggést, esetleg néhány műveletet és ezzel megoldottnak tekinti a problémát.

A megoldás megtervezésének a képessége és az algoritmikus gondolkodásra való képesség között nagy hasonlóság van. Mindkettő feltételezi az optimális cselekvéssort, de a tervkészítés tudatos és megelőzi a tevékenységet, míg a megoldás algoritmusa véletlenszerűen és utólag is kialakulhat.

A matematika minden témakörének tanítása során fejleszthető és fejlesztendő ez a terület. Gondoljunk csak a szöveges feladat szövegében olvasható: „Készíts tervet”, vagy a szerkesztéses feladatok megoldására, ahol tervkészítés nélkül nem is tudjuk megoldani a feladatot. A tervkészítést legtöbb esetben jól segíti egy kisegítő rajz, egy jó ábra, esetleg az adatok táblázatba rendezése stb.

Mind az oktatásban, mind a gyakorlati életben állandó időzavarral küszködünk. A tervszerű gondolkodás kompetenciájának kialakítása azt eredményezheti, hogy tevékenységünkre csak a szükséges időt fordítsuk.

A megoldás megtervezésének képessége és a tervkészítés igénye hosszú, kitartó, következetes tanári munka után alakul ki a tanulókban. E képesség kialakulása egyértelműen tanárfüggő. Ha a tanár nem helyez rá kellő hangsúlyt, akkor a diákok sem tartják fontosnak. Amennyiben tanítványaink fejletlenek ezen a téren, nem képesek megoldási tervet készíteni, akkor kezdetben a tanár mutassa meg a tervkészítés fortélyait, majd a megoldás után rekonstruálják a tervet, azaz a megoldás lépéseit vessék össze a megoldási tervvel.Több ilyen közös tanulói-tanári tevékenység során végül kialakul a tanulóban ez a képesség.

Nézzünk a következő példát a tervkészítésre!

> „Egy téglatest élei 12 cm, 10 cm és 15 cm hosszúak. Hány centiméteresek lehetnek annak a téglatestnek az élei, amelynek egyik éle 30 cm és térfogata megegyezik az eredeti téglatest térfogatával?”
> (Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 6. osztály, 3.63.b))

Terv:

1) Kiszámítjuk az eredeti téglatest térfogatát.
2) Felírjuk a másik téglatest térfogatának kiszámítási módját.
3) Ha a térfogat mérőszámát osztjuk az egyik él hosszával, akkor a másik két él mérőszámának szorzatát kapjuk.
4) Olyan két számot kell keresni, amelyeknek szorzata megegyezik a 3)-ban írt szorzattal.
5) Végtelen sok megoldás van. (Az élek mérőszáma bármely olyan valós szám lehet, amely megfelel a 4) feltételnek.)

Ebből a tervből is kiolvasható, hogy a megoldás terve nem azonos az egyenletek felírásával, és az is, hogy nem tartalmaz részműveleteket. A terv valójában egy vezérfonal, amely mentén végighaladva, az annak megfelelő műveleteket elvégezve eljutunk a helyes eredményhez.

A fejezet végén nézzük meg, hogyan készíttethetünk tervet egy középiskolás feladat megoldása kapcsán.

„Két test egyenletesen mozog egy körpályán. Ugyanabban az időpillanatban indulnak az A pontból ellentétes irányban. Miután találkoztak, az egyik test 4 másodperc múlva, a másik 9 másodperc múlva jut ismét az A pontba. Egy perc alatt hányszor futja végig a kört mindegyik test?”
(Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából, 870.)

A tervkészítés lépései:

1) Felvesszük a feltételeknek megfelelő ábrát.
2) A sebességek legyenek v_1 és v_2!
3) A rajz alapján az adatok közti összefüggéseket megkeressük.
4) Először határozzuk meg, hogy hány másodperc múlva találkoznak! Ez csak a sebességek függvényében tehető meg.
5) Mivel a sebességek kiszámítását nem kéri a feladat, így olyan egyenleteket, egyenletrendszert kell felírnunk, ahonnan ezek a változók kiküszöbölhetők.
6) Ha meghatároztuk a találkozásig eltelt időintervallumot, akkor kiszámíthatók azok az idők, amelyek alatt az egyes testek megteszik a teljes kört.
7) Ezután könnyen következtethetünk arra, hogy 1 perc alatt hányszor futják végig a kört a testek.

(Segítségül a megoldás:

A terv alapján az egyenletek:

$$t \cdot v_1 = 9 \cdot v_2$$
$$\underline{t \cdot v_2 = 4 \cdot v_1}$$

Ebből:

$$t^2 = 36 \quad (s^2)$$
$$t = 6s$$

1. test. 6 + 4 = 10 (s); 2. test. 6 + 9 = 15 (s) alatt teszi meg a teljes kört.

Egy egyenes arányossági következtetéssel:

a gyorsabb test hatszor, a lassúbb négyszer teszi meg a kört 1 perc alatt.)

Meg kell jegyeznünk, hogy a tanulók zöme és sok tanár is szívesen eltekint a tervkészítéstől, holott ez a „lelke” a feladat megoldásának. Egyébként csak sötétben tapogatózunk.

Egyébként érthető az ellenérzés, mert egy használható terv a gondolkodási műveletek, és a korábban már felsorolt kompetenciák többségének meglétét feltételezi. (Már csak ezért sem lehet kihagyni a tervkészítést a munkánkból.)

Kulcsszavak

feltétel, állítás

adatok közti összefüggés

táblázatok, ábrák

matematikai modell

a tervezés lépései

ellenőrzés

Kérdések, feladatok:

1) Sorolja fel a tervkészítés lépéseit!

2) Keressen szöveges, mozgásos feladatokat a Hajdu-féle tankönyvcsalád könyveiből, majd készítsen táblázatot, ábrát a megoldáshoz, végül adja meg a megoldás tervét!

3) Keressen a Hajdu-féle tankönyvcsalád könyveiből bizonyításos feladatokat, és tervezze meg a megoldás lépéseit!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I – II. főiskolai jegyzet
   Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 5-12. osztály számára
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Ajánlott irodalom:

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4.; 5-6.; 7-8. Feladatgyűjtemény
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2008

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából
Tankönyvkiadó, Budapest, 1990

VIII. Kombinatorikus gondolkodásmód

A tanulóknak ezt a képességét sokan a kombinatorikai feladatok megoldásában való jártassággal azonosítják. Kétségtelen, hogy a permutáció (sorrendezés), a kombináció (kiválasztás) és a variáció (kiválasztás és sorrendezés) nagymértékben fejlesztheti ezt a képességet, de kombinatorikus gondolkodás kompetenciája ennél lényegesen többet jelent.
Nevezetesen: *minden adatot számba vettünk-e, minden feltételt megvizsgáltunk-e, nem vettünk-e egyes esetet indokolatlanul többször is számba, minden adat között minden összefüggést fegyelembe vettünk-e, megadtuk-e az összes megoldást, a megoldások közül kiszűrtük-e az azonosakat, és kellően elemeztük-e a különbözőket.* Mindezek függvényében érthető, hogy ezen kompetencia fejlesztése miért foglal el olyan fontos helyet a matematikatanításunkban. Hiszen a gyakorlati életben, a mindennapi cselekvésünkben nem csinálunk mást, mint a minket ért hatásokat elemezzük, összevetjük őket, kiválasztjuk a szükségeseket, elvetjük a feleslegeseket, majd az összefüggések feltárása után megoldjuk a problémát.
Tehát a kombinatorikus gondolkodás egy teljességre törekvést is feltételez.(Ezen felül szoros kapcsolatban van a korábban elemzett algoritmikus gondolkodással és az értő olvasással is.)

Jó példa az alsó tagozatból ennek a képességnek a fejlesztésére a következő feladat. Itt nem a klasszikus értelemben vett kombinatorika jelenik meg, hanem olyan szövegkörnyezetet kell a tanulónak elemeznie, feltárnia az összefüggéseket benne, ami minden korábban felsorolt – a kombinatorikus gondolkodásra jellemző – tulajdonság fejlesztését teszi lehetővé.

> „Egy királynak volt 7 fia, akik között szétosztotta a várait. A legkisebb kapott valamennyit, a következő ennek a 2-szeresét, a harmadik a legkisebb fiú várainak a 3-szorosát, és így tovább. Így a legidősebb fiú a 7-szeresét kapta a legkisebb királyfi várainak. Ezt az elosztást azonban a királyné igazságtalannak találta, és így szólt a fiaihoz: Mindegyikőtök adjon minden öccsének két-két várat, a legkisebb, mivel neki nincs öccse, tartsa meg amit kapott. Így mindegyik királyfi ugyanannyi várban uralkodott. Hány vára volt a királynak?”
>
> (Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4. Feladatgyűjtemény, 6. 36.)

A megoldás lépései szépen mutatják a kombinatorikus gondokodás képességének fejlesztési lehetőségeit:

Megoldás:

1)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$	$6x$	$7x$

A testvérek által kapott várak száma, ha a legkisebb x várat kapott.

2) $x + 12$; $2x + 8$; $3x + 4$; $4x + 0$; $5x – 4$; $6x – 8$; $7x – 12$

A testvérek által adott-kapott várak száma, az anyakirályné utasítása után.

3) Az újabb osztozkodás után a várak száma egyenlő.

$$x + 12 = 2x + 8$$

4) A legkisebb királyfi 4 várat kapott a kezdetben apjától.

5) A „mindenki ad minden öccsének" azt jelenti, a legfiatalabbtól és a legidősebbtől eltekintve mindenki ad is, és kap is várakat.

6) Az 1) lépés szerint eredeti osztás után a várak száma:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
4	8	12	16	20	24	28

7) Összesen: $4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 = 112$

Az öreg királynak 112 vára volt.

8) Ellenőrzés:

1.	2.	3. .	4.
$4 + 12 = 16$	$8 – 2 + 10 = 16$	$12 – 4 + 8 = 16$	$16 – 6 + 6 = 16$
5.	6.	7.	
$20 – 8 + 4 = 16$	$24 – 10 + 2 = 16$	$28 – 12 = 16$	

Valóban egyenlő számú várat kaptak a királyfiak.

A feladatot egyenlet nélkül is meg lehet oldani, pusztán okoskodással. A várak száma ugyanis 28 többszöröse, így 2-3 érték kipróbálásával (28, 56, 112, 224, . . .) megkapjuk a várak számát (112).

A megoldásnál fontos, hogy minden adatot felhasználtunk, minden feltételt figyelembe vettünk (és pontosan egyszer), megkerestük az adatok közti összefüggéseket (mindegyiket), majd megadtuk a helyes, és teljes megoldást.

Egy nem szokványos feladat az általános iskola felső tagozatos tanulói számára:

> „Hányféleképpen lehet elosztani 4 sütit 3 gyerek között, ha egy gyerek többet is kaphat, illetve nem feltétlenül kap mindenki?"
>
> (Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 5 – 6. Feladatgyűjtemény, 7.6.20.)

A megoldás lépései itt is mutatják a kombinatorikus gondolkodás ismérveit.

1) 1 gyerek 4 sütit kap: 3 eset (400, 040, 004)
   1 gyerek 3 sütit kap: 6 eset (310, 301, 130, 103, 031, 013)
   2 gyerek 2-2 sütit kap: 3 eset (220, 202, 022)
   1 gyerek 2 sütit kap: 3 eset (211, 121, 112)

2) Összesen 15 féleképpen lehet a feladatban szereplő módon elosztani a süteményt a gyerekek között.
   Itt is a következő ismérvek jönnek elő:
   – Minden esetet számba vettünk?
   – Mindegyik esetet pontosan egyszer vettünk számba?
   – Teljes-e a megoldásunk?
   – Logikus sorrendben követik-e egymást a megoldás lépései?

Középiskolában olyan feladattal is próbálkozhatunk, amelyben már képleteket is használunk.

> „Öt házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni?"
> (Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából, 3256.)

Megoldás:

1) Ha a házastársak egymás mellett ülnek, akkor úgy tekinthető a feladat, mintha 5 személy összes lehetséges sorrendjét keresnénk. („Összekötjük" a házastársakat és a párok sorrendjét keressük.)
   Ezt $5! = 120$ féleképpen tehetjük meg.
2) Viszont a házastársak helyet cserélhetnek egymással, amit a feladat feltételei megengednek. Minden házastársi csere kétszeresére növeli az összes esetek számát. 5 házaspár esetén ez 2^5-szerest jelent.
3) Ebből látszik, hogy az összes lehetséges sorrend száma $32 \cdot 120 = 3840$

Itt sem tekinthetünk el egyetlen feltételtől sem, mert egészes más lenne a feladat, ha a házastársak nem ülnének egymás mellett, vagy ha férfi nem ülhetne férfi mellett, és nő sem nő mellett stb.

Azt is az olvasó figyelmébe ajánljuk, hogy a kombinatorikai feladatok megoldása akkor (és csak akkor) fejleszti a kombinatorikus gondolkodás képességét, ha nem képlet centrikusan tanítjuk azt. A túlzott képlethasználat inkább a formalizmust fejleszti a tanulóban, ami a képességek fejlesztése terén visszahúzó erő.
A kombinatorikus gondolkodásra inkább a „gondolatok szabad áramlása”, mint a „formába való zárása” jellemző.

Kulcsszavak

kombinatorikus gondolkodás

adatok szükséges és elégséges volta

teljesség a feladatok megoldásában

feladatok elemzése

Kérdések, feladatok:

1) Sorolja fel a kombinatorikus gondolkodás jellemzőit!
2) Milyen témakörökön keresztül, milyen munkaforma, módszer, eszköz segítségével, hogyan fejleszthető a tanulók kombinatorikus gondolkodása?
3) A Hajdu-féle tankönyvcsalád könyveiből válasszon ki szöveges feladatokat (alsó tagozaton, felső tagozaton és középiskolában), majd elemezze a megoldását a kombinatorikus gondolkodás képessége szemszögéből!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
   Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010
3. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika programok 5-8. osztály számára
   Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2006

Ajánlott irodalom:

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából
Tankönyvkiadó, Budapest, 1990

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4.; 5-8. Feladatgyűjtemény
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2008

IX. A gyakorlati alkalmazásra való képesség

Mint korábban írtuk, *olyan matematikai ismereteket kell kialakítanunk a tanulókban, amelyek alkalmazásra képesek.* Tehát *nem önmagáért a matematikai tartalomért szerezzük az ismereteket, hanem azért, hogy azt más területen* (egyéb tantárgyak, gyakorlati élet) is alkalmazni tudjuk. Többek közt azért is fontos ennek a képességnek a kialakítása, mert nagy motiváló hatással bír. Ha a tanuló *látja tanulásának hasznát, érzi, hogy a gyakorlati életben fel tudja használni ismereteit,* akkor nem tehernek, hanem hasznos időtöltésnek, érdekes elfoglaltságnak érzi a tanulást. A társadalmi elvárások is azt mutatják, hogy ezen a területen kell leginkább megfelelniük a tanulóknak.

Már a fogalomalkotás, az ismeretszerzés kezdetén olyan példát adunk, amely megmutatja ennek az ismeretnek a gyakorlati vonatkozásait. Például a törttel való osztás szükségességét erősen megkérdőjelezi a tanuló, ha csak közöljük, hogy törttel úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk.

Helyette célszerű egy olyan gyakorlati példasort adni, amely rávezeti a tanulót erre az ismeretre. (Zárójelben a megoldást mutatjuk, amellyel a tanuló felfedezi a szabályt.)

Nézzük a következő feladatot: (Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 6. 68. oldal)

1) 5 kg burgonya ára 360 Ft. Hány forint 1 kg burgonya ára? (360:5; $360\cdot\frac{1}{5}$)
2) 3 kg alma ára 480 Ft. Hány forint 1 kg alma ára? (480:3; $480\cdot\frac{1}{3}$)
3) $\frac{1}{2}$ kg dughagyma ára 250 Ft. Hány forint 1 kg dughagyma ára? ($250:\frac{1}{2}$; $250\cdot 2$)
4) $\frac{1}{4}$ kg dió ára 240 Ft. Hány forint 1 kg ára? ($240:\frac{1}{4}$; $240\cdot 4$)
5) $\frac{3}{4}$ m selyem ára 750 Ft. Hány forint 1 m selyem ára? ($750:\frac{3}{4}$; $750\cdot\frac{4}{3}$)

A példasorból egyrészt tükröződik a gyakorlati élet, másrészt a matematikai tartalom. Egy (nem nulla) számmal osztani ugyanazt jelenti, mint reciprokával szorozni.

Így az értelem nélküli verbális ismeretszerzés helyett a gyakorlati életet tükröző, tudatos ismeretszerzés kerül előtérbe.

A begyakoroltató, elmélyítő feladatoknál is fontos, hogy a gyakorlati alkalmazhatóság kitűnjön a feladatból.

Például:

a) 23 dkg felvágott ára 276 Ft. Mennyibe kerül 1kg 25 dkg ugyanilyen felvágott?
b) Egy ember 12 nap alatt tud elvégezni egy munkát. 6 ember ugyanekkora munkatempóval hány nap alatt készítené el ezt a munkát?
c) 50 000 Ft-ot kaptál ajándékba. Ha az OTP évi 8%-os kamatot fizet érte, egy év múlva hány forintot kapsz kézhez?
d) Egy térképvázlaton 3 falu található. Meghatározandó a falvak valódi távolsága, ha a méretarány 1:200 000.
e) Egy téglalap alakú telek egyik oldala 20 m. A telek be nem épített területe 2-szerese az épület alapterületének. Ha a ház alapterülete 80 m^2, akkor hány méter hosszú a telek másik oldala?

(Ezeknek a felső tagozatos feladatoknak a megoldását az olvasóra bízzuk.)

Középiskolában még inkább azt érzi nagyon sok tanuló, hogy a matematikatanulás felesleges teher, nincs értelme a feladatok egzakt megoldásának, és főleg nincs gyakorlati haszna. Ezen a tévképzeten javíthat az, ha olyan egyszerű feladattal vezetjük be az adott matematikai ismeretek tárgyalását, amiből közvetlenül kimutatható a gyakorlati alkalmazhatóság.

„Egy új gép ára 2 millió forint. Elhasználódás, elavulás miatt évente 20 % - ot veszít értékéből. Hány év múlva lesz a gép értéke az eredeti ár fele?"
(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 12. 1.63.)

A feladatok megoldása a mértani sorozattal kapcsolatos ismereteket feltételezi. Sajnálatos tapasztalat az, hogy a tanulók nem szívesen tanulják a sorozatokat. Az ehhez hasonló példákon meg lehet mutatni, hogy ezeknek az ismereteknek is van gyakorlati haszna.

Megoldás:

Az 1. év végén a 2 millió forint 80 % - át, (0,8 – szeresét) éri a gép.

$$2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6 \text{ (millió Ft)}$$

A 2. év végén az 1,6 millió forint 80 % - át éri a gép.

$$1{,}6 \cdot 0{,}8 = 1{,}28 \text{ (millió Ft)}$$

A 3. év végén a 1,28 millió forint 80 % - át éri a gép.

$$1{,}28 \cdot 0{,}8 = 1{,}024 \text{ (millió Ft)}$$

A 4. év végén a 1,024 millió forint 80 % - át éri a gép.

$$1{,}024 \cdot 0{,}8 = 0{,}8192 \text{ (millió Ft)}$$

Látható, hogy 3 év múlva (illetve annál kicsit hosszabb idő alatt) csökken a gép ára felére.
Ha pontosan akarjuk kiszámolni az amortizáció mértékének időtartamát, akkor ismét előjön egy másik – a tanulók által eléggé vitatott – tananyag, a logaritmus fogalma.
Hiszen egyszerű egyenlet formájában így írhatók fel az előbbi megoldási lépések:

$$2 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)^{n} = 1$$

Ebből: $n \cdot \lg 0{,}8 = \lg 0{,}5$

$$n \approx 3{,}1$$

Ehhez hasonlóan minden témakör tanítását tudjuk olyan kidolgozott mintapéldával kezdeni, ami előrevetíti a tananyagnak a gyakorlatban való alkalmazhatóságát. A tanárnak nem szabad kihasználatlanul hagyni ezt a motivációs lehetőséget sem.

Kulcsszavak

alkalmazás, alkalmazhatóság
matematikai modell
felfedeztető tanulás
a gyakorlati alkalmazás, mint motiváció
transzferálás
arányosság
kamat
mozgások

Kérdések, feladatok:

1) Milyen egyéb képességek meglétét feltételezi a gyakorlati alkalmazhatóság képessége?

2) 5. osztálytól 12. osztályig minden témakörhöz keressen olyan feladatokat a Hajdu-féle tankönyvcsaládból, amellyel igazolni tudja, hogy a matematika nélkülözhetetlen a gyakorlati alkalmazás képességének kialakításához!

Kötelező irodalom:

Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztályok számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematikai programok 5-8.
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2006

Ajánlott irodalom:

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4., 5-6., 7-8. Feladatgyűjtemény
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2008

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából
Tankönyvkiadó, Budapest, 1990

X. Függvényszerű gondolkodás

A matematikában minden téma, minden témával valamilyen mértékben összefüggésben van. Hasonló igaz más tantárgyakra, és ugyanez mondható el a gyakorlati életről is. Ily módon a függvényszerű gondolkodás képességének kialakítása fontos célja és feladata kell, hogy legyen a matematikatanításunknak.

Akkor mondjuk, hogy tanulóinkban kialakult ez a kompetencia, ha képes két, vagy több halmaz, illetve azok elemei közti kapcsolatot (kapcsolatokat) megtalálni, látja az egyes tényezők közti hasonlóságot, azonosságot, különbözőséget, észreveszi közöttük az ok-okozati összefüggéseket, ha képes egymástól viszonylag távol lévő ismeretek között párhuzamot vonni, ha képes ismereteit más összefüggésekben is alkalmazni, (azaz képes a transzferálásra), és rendelkezik analógiai gondolkodás képességével is.

Ezek a képességek lehetővé teszik, hogy a tanuló könnyebben eligazodjon a gyakorlati élet különböző hatásai között, jobban alkalmazkodjon a társadalmi elvárásokhoz, és minden téren jobban beilleszkedjen a társadalomba.
A mindennapi döntéshozatalban is sokat segít az, ha a tanuló rendelkezik ezzel a kompetenciával. A köznapi cselekvéseiben is a „mit, miért, hogyan?” kérdéshármasra adott válasza határozza meg tevékenysége sikerét, vagy kudarcát. Erre a kérdéshármasra érdemben csak a függvényszerű gondolkodás képességével tudunk válaszolni.

A matematikatanárok zöme ennek a kompetenciának a fejlesztését leszűkíti a „Relációk, függvények, sorozatok” témakör tanítására. Kétségtelen, hogy ezeken a tananyagokon keresztül mutatható be leginkább ennek a képességnek a fejlesztése, de hogy az előbb felsorolt ismérveknek maradéktalanul megfeleljünk, ennél lényegesen szélesebb merítés szükséges a matematikai témakörök sokaságából.
Túlzás nélkül állíthatjuk, hogy a geometria, az algebra, a szöveges feladatok, a számelmélet, és a sort még lehetne folytatni, legalább olyan mértékben alkalmas a függvényszerű gondolkodás kompetenciájának kialakítására, fejlesztésére, mint az említett relációk, függvények, sorozatok.

Vegyünk egy példát az alsó tagozatból, ahol a tanulók képessége, képzettsége még nem olyan fejlett, hogy rendelkezzenek azokkal a feltételekkel, amelyekkel egy működő kompetenciát tudnánk kialakítani. Itt természetesen „csak” a függvényszerű gondolkodás alapjait rakjuk le. (Ezek az alapok legalább annyira fontosak, mint felsőbb korosztályban a fejlesztés. Sőt!)

> Rajzolj egy 10 cm hosszú szakaszt! Oszd fel ezt a szakaszt három részre úgy, hogy kettő egyenlő legyen, a harmadik pedig 1 cm-rel hosszabb legyen a másik kettőnél!
> (Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4. 5. 18. feladat alapján)

Vizsgáljuk meg, hogy milyen témakörök között, milyen összefüggéseket kell felfedeznie a 4. osztályos tanulónak!

- Szakasz másolás, mérés.
- Arányos osztás.
- Egyenlőtlenségi reláció.
- Mennyiségek növelése, csökkentése.

Megoldás:
A megrajzolt szakasz egyik végpontjában megjelölünk 1 cm hosszú szakaszt (marad 9 cm), 3 cm-es egyenlő részekre osztjuk a 9 cm-es szakaszt, majd bejelöljük a szakaszok végpontjait. (3 cm, 3 cm, 4 cm)

Egy ilyen, viszonylag egyszerű feladattal is lehet többirányú vizsgálódást végezni, ráadásul a gyerek rajzol, mér – manipulatív tevékenységet folytat – felfedez, és közben feltárja az egyes adatok, feltételek közti összefüggést is.
Hasonló jó eredmények érhetők el a szabályjátékokkal, az ábrasorozatok folytatásával, számok ábrákon való elhelyezésével – megadott összefüggések alapján, geometriai alakzatok darabolásával, számegyenes egyes pontjainak meghatározásával, stb.

A középiskolai tananyag szép példája a függvényszerű gondolkodás képességének fejlesztésére, a szögpárok és a transzformációk kapcsolata.
(Csak érintőlegesen soroljuk fel, nem feladat megoldásaként.)

1) Egyállású szögek – eltolás.
2) Merőleges szárú hegyesszögek – forgatás.
3) Váltószögek (csúcsszögek) – középpontos tükrözés.

Az ilyen fajta feldolgozással a függvényszerű gondolkodáson túl, még számos kompetenciát fejleszthetünk. Leginkább a gondolkodási műveleteket, a kreativitást, a problémamegoldást, és nem utolsó sorban a rendszerszemléletet.

Kulcsszavak

halmazok, elemek közti kapcsolat
ok – okozat
feltétel – állítás
transzferálás
mit, miért, hogyan cselekszünk
összehasonlítás
egyezőség, különbozőség

Kérdések, feladatok:

1) Mikor mondjuk, hogy rendelkezik a tanuló a függvényszerű gondolkodás

kompetenciájával?

2) Sorolja fel, hogy milyen egyéb kompetenciák szükségesek a függvényszerű gondolkodás kialakításához!

3) Gyűjtsön a Hajdu-féle tankönyvcsalád tankönyveiből olyan feladatokat a számelmélet, a szöveges feladatok, és a geometriai transzformációk témakörből, amelyekkel a függvényszerű gondolkodás kompetenciája fejleszthető! Elemezze a feladatot a fenti szempontok alapján!

Kötelező irodalom:

Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztályok számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematikai programok 5-8.
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2006

Ajánlott irodalom:

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4., 5-6., 7-8. Feladatgyűjtemény
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2008

XI. Tájékozódás térben és időben

Nagyon széles területet ölel fel ez a kompetencia. Ide sorolható *a mértékekben, mértékegységekben való jártasság, készség, a koordináta-geometriai ismeretek alkalmazására való képesség, a geometriai alakzatoknak, mint a használati tárgyak, objektumok matematikai modelljeinek ismerete, a geometriai számításokban való jártasság – nevezetesen a kerület-, terület-, felszín-, térfogat-, űrtartalom-számítás, – a háromszögek, négyszögek és a kör geometriája alapfogalmainak ismerete, gyakorlatban történő alkalmazása, továbbá a geometriai testek, a hasáb, henger, gömb, kúp, gúla megjelenése a köznapi gyakorlatban, mint a minket körülvevő világ geometriai modelljei.*

Több matematikatanítással foglalkozó külföldi szakértő szerint a magyar matematikában túl sok geometriai ismeret szerepel. A tanterveket, tankönyveket összehasonlítva a környező országok tanterveivel, tankönyveivel, megállapíthatjuk, hogy valóban nagyobb arányban szerepel a magyar könyvekben a geometria, mint a környező országokban. Viszont ez nem feltétlen hátránya a magyar matematikaoktatásnak – sőt. Elég csak a fejlesztendő kompetenciák fenti felsorolását figyelembe venni ahhoz, hogy lássuk e téma tanításának fontosságát.

Ezen túl még egyéb indokokat is fel tudunk sorolni. A pszichológusok kimutatták, hogy a két agyféltekénk más-más területet irányít. Nézzük ezeket a teljesség igénye nélkül!
Például, a bal félteke „felelős" a következő területekért:
Beszéd-nyelv használata; logikus, analitikus, algebrikus, intellektuális tevékenység; konvergens, racionális, következtető, absztrakt gondolkodás; irányított tevékenység (tervezés) és időérzék.
A jobb félteke „felelős" a következő területekért:
néma, látó, térmanipuláló, egyidejű, analóg, szintetikus tevékenység; geometrikus, divergens, irracionális, tárgycentrikus gondolkodás; szabad (nem irányított) és időben nem korlátozott tevékenység.

Ebből is látható, hogy a geometria a jobb féltekét fejleszti leginkább, és ebből adódóan legalább olyan fontos, mint a többi témakör.
Ez a magyar tanítási stratégia, a témakörök ilyen válogatása az agyunk működésének, a két féltekének egyenlő fejlődését biztosítja.
Ha a matematikatanításunk fő célkitűzése a kompetenciaterületek fejlesztése – márpedig az –, akkor a tananyagválasztás területén ezt az utat kell követnünk.
Mikor mondhatjuk azt, hogy a tanuló képes tájékozódni térben és időben? Milyen tulajdonságokkal, képességekkel, jártasságokkal kell rendelkeznie ehhez?

Tud a kívánt mértékegységgel mérni hosszúságot, tömeget, időt, területet, térfogatot, képes ezen mértékegységek átváltására, ismeri a deci, centi, milli, a deka, hekto, kilo prefixumokat, ezeket képes a mindennapi gyakorlatban – vásárlás, utazás, munka, stb. alkalmazni.
Képes dolgokat, objektumokat térben és időben elhelyezni, tevékenységeket, összefüggéseket, folyamatokat, eredményeket koordináta-rendszerben grafikusan ábrázolni, illetve grafikonokról, diagramokról értékeket leolvasni, képes táblázatokat (például menetrendet) elemezni, azokat a gyakorlatban hasznosítani.

A környezetében fellelhető tárgyakban képes felfedezni a síkbeli és térbeli geometriai alakzatokat, azoknak tulajdonságait legalább jártasság szintjén képes a mindennapi munkájában alkalmazni.
Tudjon távolságot, területet, térfogatot, időt, tömeget becsülni, és a becslésre való képességét építse be a tevékenységébe.

Ezek a képességek, jártasságok, készségek egy sor egyéb kompetencia meglétét feltételezik, és csak erős, tudatos tanári – tanulói tevékenység során fejleszthetők. A tudatos tervező tanári munkának, a tananyag optimális kiválasztásának, a megfelelő munkaformának, módszernek, eszköznek óriási szerepe van e kompetencia kialakítása során.

Egy-egy alsó tagozatos, felső tagozatos és középiskolás példán keresztül mutatjuk meg a fejlesztési lehetőségeket, a teljesség igénye nélkül.
Matematikatanításunk egyik legégetőbb problémája a becslés, a mérés, mértékegységek, mértékváltás alkalmazásra képes ismeretének elsajátítása. Még középiskolában is gyakran találkozunk olyan tanulókkal, akik nem érzik, nem értik, nem látják az egyes mértékek közötti összefüggéseket. Nincsenek tisztába a prefixumokkal, így természetes módon az átváltások is nehezen mennek.
Például: gimnáziumban sok tanuló adott helytelen választ arra, hogy 1 cm^3 hány milliliter. (Az előzetes információk szerint azt tudták, hogy 1 dm^3 = 1 liter.) Ez arra enged következtetni, hogy átgondolatlanul, verbálisan sajátították el a tanulók a térfogat és az űrtartalom közti összefüggést.
(Valószínűleg sokakat zavart az, hogy az egyikben milli, a másikban centi prefixum szerepelt.)

A távolságok becslésére, illetve a becslésre való képesség hiányára pedig a következő példát tudjuk felhozni felső tagozatból.
Egy mozgásos feladat megoldásaként több tanuló a Nyiregyháza – Budapest távolságra 242 cm-t kapott, és ezt az eredményt el is fogadta. Itt szintén a mértékváltásban tapasztalható hiányosságok (társulva a becslésre való képesség hiányával) okozták a problémát.
A követendő út:
Nem értelem nélküli bevésés útján kell kialakítanunk a mérés, mértékek, mértékváltás ismereteket, hanem cselekedtetve, felfedeztetve, a hibákat magukkal a tanulókkal javíttatva kell azt tennünk. Az alsó tagozatos tanuló csak akkor fogja megtanulni, hogy 1 m = 100 cm, ha a kezébe adjuk a mérőszalagot, és összehasonlíthatja a két hosszúságot. Ezáltal a centi

prefixum értelmét (század rész) is megérti, és azt is megmutathatjuk, hogy a centiméterből (egyszázad méterből) 100 db tesz ki 1 métert. Tehát többirányú vizsgálódást valósíthatunk meg, és rendszerbe foglalhatjuk az ismereteket.

Például alsó tagozatban a következő feladat megoldásával győződhetünk meg arról, hogy a tömegmérés és mértékváltás ismeretével milyen szinten rendelkezik a tanuló.

„Egy jegesmedve tömege körülbelül 15 szánhúzó kutya tömegével egyenlő. Egy szánhúzó kutya tömege körülbelül megegyezik 5 alaszkai nyúl tömegével. Egy alaszkai nyúl 7-9 kg.

a) Legalább hány kilogramm lehet egy jegesmedve?
b) Legfeljebb hány kilogramm lehet egy jegesmedve?
c) Hány szánhúzó kutya tömege lehet ugyanannyi, mint egy 315 kg-os kölyök jegesmedvéé?
d) Hány alaszkai nyúl tömege lehet ugyanannyi, mint egy 315 kg-os kölyök jegesmedvéé?”

(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4. Feladatgyűjtemény, 3. 38.)

(A megoldást az olvasóra bízzuk.)

Ez a feladat egyben azt is mutatja, hogy még alsó tagozatban sem elégedhetünk meg végső célként az egyszerű mértékváltásokkal, hanem a körülbelüli, becsült értékkel, és a problémaszituációba ágyazott tömegértékekkel való számolást is elvárhatjuk.

Az általános iskola felső tagozatán – a normálalak tanulása után – adhatunk olyan feladatokat, amelyekkel elmélyíthetjük a mértékváltást, továbbá ellenőrizhetjük tanulóink ez irányú képességeinek szintjét.

„ A Nap és Föld közepes távolsága 149,5 millió kilométer. A Föld Nap körüli keringési ideje megközelítőleg 365 nap és 6 óra. A Mars közepes naptávolsága 1,524-szerese a Föld naptávolságának, és keringési ideje 1,881-szerese a Föld keringési idejének.

a) Hány kilométer hosszú a Föld, illetve a Mars Nap körüli keringésének pályája?
b) Hozzávetőlegesen hány másodpercig tar, amíg a Föld, illetve a Mars megkerüli a Napot?
c) Másodpercenként hány kilométert tesz meg a Föld, illetve a Mars a Nap körül?

(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 7-8. Feladatgyűjtemény, 2. 3. 35.)

A feladat elég bonyolult. Átlagos, vagy annál gyengébb képességű általános iskolai tanulóknak nem is ajánlott feladni. Még középiskolában is csak a jobb képességű tanulók tudnak érdemben foglalkozni a feladattal.
A megoldás helyett inkább vizsgáljuk meg, hogy milyen ismeretek szükségesek a mértékváltás köréből a feladat megoldásához.

149,5 millió kilométer = $1{,}495 \cdot 10^8$ km = $1{,}495 \cdot 10^{11}$ m

365 nap 6 óra = 365,25 nap = $365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600$ s = $3{,}156 \cdot 10^7$ s

Tehát mind a hosszúság, mind az idő kiszámítása meglehetősen bonyolult, de ha hibátlanul megoldja a tanuló, akkor e két mértékváltást illetően megnyugodhatunk.

A térben és időben való tájékozódást nagymértékben segíti valamely tevékenység koordináta – rendszerben történő ábrázolása. Nézzünk erre egy középiskolás példát:

„Adjuk meg az egyes járművek mozgását leíró (idő – út) függvényeket! Ábrázoljuk közös koordináta – rendszerben e függvények grafikonját (az út-tengely 1 beosztása 2 m-t jelentsen). Oldjuk meg grafikusan és algebrai úton is a következő feladatot:

Egy kerékpáros sebessége $v = 4\ \frac{m}{s}$. Egy motorkerékpáros $a = 2\frac{m}{s^2}$ gyorsulással képes elindulni. Hány másodperc múlva éri utol az elinduló motorkerékpáros a tőle már 5 m távol lévő, egyenletesen távolodó kerékpárost? ($s = v \cdot t;\ \ s = \frac{a}{2}t^2$)"

(Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 12. 5. 16.)

A feladat megoldása során a következő képességek mozgósíthatók.

- Tájékozódás térben, időben: az út-idő grafikon megrajzolása révén.
- Adatok leolvasása a grafikonról. (Hol jelentkezik az, hogy a kerékpáros már 5 m-t megtett?)
- Különböző típusú mozgások grafikonjainak összehasonlítása. (Egyenes vonalú egyenletes mozgás – egyenes vonalú gyorsuló mozgás. Egyenes – parabola.)
- Összefüggések megkeresése a két megtett út között.

(Megoldás: 5 s alatt éri utol a motoros a kerékpárost.)

Az ilyen jellegű feladatok azon túl, hogy a függvényszerű gondolkodás képességét is fejlesztik, arra is jók, hogy a térben és időben való rendezéshez szükséges alkalmasságot is fejlesszék.

A témával kapcsolatos további kidolgozott mintapéldák és feladatok tanulmányozását az olvasóra bízzuk. A Hajdu-féle tankönyvcsalád szerzői alsó tagozattól az érettségiig törekedtek arra, hogy ebben a fejezetben írt kompetencia fejlesztési lehetőségek is maximálisan teljesüljenek.

Kulcsszavak

tájékozódás térben, időben

mérés,mértékváltás, mértékegységek

prefixumok

használati tárgyak geometriai modelljei

grafikonok, koordináta-rendszer

kerület, terület, felszín, térfogat

Kérdések, feladatok:

1) Sorolja fel a tájékozódás térben és időben kompetencia jellemző sajátosságait!
2) Mik a mérés, mértékváltás, mértékegységek témakörei tanításának nehézségei, és hogyan küszöbölhetők ki ezek?
3) Keressen a Hajdu-féle tankönyvcsalád tankönyveiben olyan geometriai számításos feladatokat, amelyekkel az itt elemzett kompetencia fejleszthető!

Kötelező irodalom:

Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztályok számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematikai programok 5-8.
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2006

Ajánlott irodalom:

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4., 5-6., 7-8. Feladatgyűjtemény
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2008

XII. Bizonyítási igény, ítélőképesség

„Amint meggyőződtél arról, hogy a tétel igaz, kezdd el a bizonyítást!” mondja a klasszikus matematikaprofesszor.
(Pólya György: Indukció és analógia, Gondolat Kiadó, Budapest, 1988)

A köznapi életre így fordíthatnánk le: amint meggyőződtél róla, hogy állításod, kijelentésed igaz, bizonyítsd be. A bizonyítás, az ítéletalkotás, a döntés a mindennapi élet velejárója. *El kell tudnunk dönteni, hogy az élet kisebb-nagyobb problémáinak megoldása során helyesen cselekedtünk-e, meg kell ítélnünk, hogy a hozott döntésünk mennyiben helytálló, vagy mennyiben helytelen, milyen következményekkel jár.* A matematikaoktatásban kiemelten fejleszthető, és fejlesztendő ez a kompetencia.

Célszerű betartani a következő tanácsot: „Ha be kell bizonyítanod egy tételt, egy állítást (esetleg döntésed helyességét), ne rohanj neki mindjárt. Először értsd meg teljesen miről szól a tétel, próbáld meg tisztán látni, hogy mit is jelent! Ezután ellenőrizd a tételt, mert lehet, hogy nem igaz! Vizsgáld a tétel esetleges következményeit, ellenőrizz annyi speciális esetet, amennyi csak kell ahhoz, hogy meggyőződj a tétel igazságáról!”
(Pólya György: Indukció és analógia, Gondolat Kiadó, Budapest, 1988)

Ezt Pólya György a matematikai tételek bizonyítására fogalmazta meg, de minden köznapi cselekvésünkre is igaz, így döntésünk nem lesz (vagy kevésbé lesz) helytelen.
Vizsgáljuk meg, mi jellemző arra a tanulóra, akiben megvan a bizonyítási igény, aki rendelkezik a bizonyítási képesség és az ítélőképesség kompetenciákkal.
Ismernie kell a tételt és az állítást, a köztük lévő ok – okozati kapcsolatot, ismernie kell azokat a logikai következtetési sémákat, amelyekkel az adott állítást a feltételek és az adatok közti összefüggések feltárásával olyan egyszerű tételre vezetjük vissza, amelynek igazsága (esetleg hamissága) közvetlenül eldönthető.
Megjegyezzük, hogy vannak olyan tételek, állítások is, amelyekben a feltételek és az állítások nem választhatók külön. Ilyenek például a következő tételek: Végtelen sok prímszám van, vagy a $\sqrt{2}$ irracionális szám, stb.

Éppen a tételek sokfélesége miatt, többféle bizonyítási eljárás létezik. Az általános iskola alsó tagozatában még csak indoklást kérünk a tanulóktól, a felső tagozatban már megjelenik az úgynevezett direkt bizonyítás. Középiskolában már tanítjuk az indirekt bizonyítást, és a teljes indukciót is. Mindegyiknek más a logikai következtetési sémája.

Tanulóink képességeinek függvényében célszerű mindegyiket mintapéldákon bemutatni. Viszont, ha a bizonyításra való képességet vizsgáljuk, megállapíthatjuk, hogy ennek a területnek a fejlesztése is majdnem minden korábban említett kompetencia meglétét feltételezi a tanulóknál.

A bizonyítási képesség és ítélőképesség kialakításánál még egyéb hátráltató tényezők is szerepet játszhatnak. Ilyen például az általános iskola 5. osztályában a háromszög egyenlőtlenségre vonatkozó tétel. A 10-11 éves tanuló nem érti, hogy mit kell azon bizonyítani, hogy a háromszög két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldal. Ezt ő természetesnek veszi.

Valójában ez érthető, mert csak 7. osztályban lesznek meg azok a feltételek (mind szaktárgyi, mind pszichés), amelyek a tétel kimondásának és igazolásának az indokoltságát mutatják.

Mivel – mint említettük – a bizonyítási készség kialakulásához nagyon sok egyéb kompetencia szükséges (például a gondolkodási műveletek majdnem mindegyike), ezért nem is alakulhat ki az általános iskolában ez a kompetencia. (Vagy csak nagyon kezdetleges szinten.) Viszont, mint a többi kompetenciánál is, a bizonyításra való képesség csírái már alsó tagozatban kialakulhatnak. Ezt a megoldások indokoltatásával érheti el a tanár.

A tanulónak indoklás nélkül adott válaszára, mindig ott kell lenni a tanár „miért” kérdésének. Ha ezt következetesen végzi, akkor idővel a tanulók sajátjává válik a bizonyítási igény, és felszólítás nélkül is indokolja állítását.

Itt elég a 2. osztályban tanítandó bennfoglalásra utalnunk, ami a későbbi osztás alapja: 6-ban a 2 megvan 3-szor, mert $3 \cdot 2 = 6$. Tehát visszautalunk a korábban szerzett ismeretekre.

A bizonyításokat mindig úgy kell tanítanunk, hogy az alapokkal (a feltételben és az állításban szereplő ismeretekkel) rendelkezzen a tanuló. Ily módon, például a 6., 7. osztályban nem általánosított oszthatósági szabályokat tanítunk, hanem konkrét számokon keresztül vezetjük le a bizonyítás lépéseit.

Nézzünk erre egy tételt:

Egy tízes számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből álló szám osztható 4-gyel.

Bizonyítás:

Tekintsünk egy tetszőleges természetes számot. Ezt felírhatjuk a helyiértékek szerinti összegalakban:

$$52\,428 = 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8$$

Vegyük észre, hogy ennek az öttagú összegnek az első három tagjában a 100 ($= 10^2$) szorzótényezőként szerepel. Ebből adódóan ezek a számok, (illetve ezek összege) oszthatók 100-zal, azaz 4-gyel is, hiszen 100 4-nek a 25-szöröse. Tehát, ha a két utolsó számjegyből álló szám (a 28) osztható 4-gyel, akkor a szám is. Ha nem, akkor a szám sem.

Minden általános iskolai bizonyításnál célszerű ezt az utat követni, és maximálisan figyelembe venni a tanulók feltételezett képességét, képzettségét.

Középiskolában a jobb képességű tanulóknak már taníthatjuk ennek az általánosított változatát, amikor a természetes szám kanonikus alakjával dolgozunk:

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$$

Ezzel az alakkal ugyanazokat a bizonyítási lépéseket végezzük el, mint a konkrét számmal.

A középiskolában tanítandó indirekt és teljes indukciós bizonyítási mód elemzését az olvasóra bízzuk. (Lásd: Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 9-12.)

A tanulók logikai képességét szépen fejleszthetjük a tételek szerkezetének vizsgálatával, illetve a tétel megfordításával, tagadásával, és az ekvivalens átfogalmazásával. Ezeket egy-egy példán keresztül mutatjuk be.

1) Tétel:

„Ha egy természetes szám osztható 5-tel, akkor osztható 10-zel is.”

Feltétel: osztható 5-tel.

Állítás: osztható 10-zel.

Az állítás hamis. Az 5-tel való oszthatóság szükséges feltétele a 10-zel való oszthatóságnak, de nem elégséges.

A tétel megfordítása:

„Ha egy szám osztható 10-zel, akkor osztható 5-tel is.”

Feltétel: osztható 10-zel.

Állítás: osztható 5-tel.

Az állítás igaz. A 10-zel való oszthatóság elégséges feltétele az 5-tel való oszthatóságnak. (Viszont nem szükséges, mert tudunk olyan 5-tel osztható számot mondani, ami nem osztható 10-zel.)

A tétel tagadása:

„Nem igaz, hogy ha egy természetes szám osztható 5-tel, akkor osztható 10-zel is”

Ez a tétel így igaz. Vegyük észre, hogy a tagadás megváltoztatja az állítás logikai értékét.

A tétel ekvivalens átfogalmazása:

„Ha egy természetes szám nem osztható 10-zel, akkor nem osztható 5-tel sem.”

Feltétel: nem osztható 10-zel.

Állítás: nem osztható 5-tel sem.

Az állítás logikai értéke hamis, tehát megegyezik az eredeti tétel logikai értékével.
(Ezt a fajta átfogalmazást nevezzük kontra pozíciónak.)

2) *Tétel:*

„Egy négyszög pontosan akkor rombusz, ha átlói merőlegesen felezik egymást.”

Feltétel: a négyszög rombusz.

Állítás: átlói merőlegesen felezik egymást.

A tétel igaz. Ebben a tételben a feltétel szükséges és elégséges. Ez azt jelenti, hogy a tétel megfordítása is igaz.

A tétel megfordítása:

„Ha egy négyszög átlói merőlegesen felezik egymást, akkor a négyszög rombusz.”

Feltétel: az átlók merőlegesen felezik egymást.

Állítás: a négyszög rombusz.

Ez a tétel is igaz.
Tehát, ha egy tétel megfordítható, akkor azt a „pontosan akkor”, illetve az „akkor és csakis akkor” szóösszetételekkel fejezhetjük ki.

Összességében: a gyakorlati életben az egyik legfontosabb kompetencia az érvelés, a bizonyítás, a döntés képessége. Minden témakörnél bőven találunk olyan feladatokat, amelyekkel ezeket a képességeket fejleszthetjük. A tanár feladata az, hogy úgy építse fel a tanóráját, hogy ezen tulajdonságok közül a lehető legtöbbet fejlessze.

Kulcsszavak

tétel

feltétel, állítás, ok, okozat

bizonyítás

ítélőképesség

szükséges, elégséges feltétel

tételek tagadása, megfordítása, ekvivalens átfogalmazás

állítások logikai értéke

Kérdések, feladatok:

1) Mi jellemzi a bizonyítási képességgel és ítélőképességgel rendelkező tanulót?
2) Keressen tételeket a Hajdu-féle felső tagozatos és a középiskolai tankönyvekből, vizsgálja meg a feltételeket, fordítsa meg a tételt, tagadja, majd adja meg ekvivalens átfogalmazását!
3) Milyen logikai lépésekből áll a bizonyítás?

Kötelező irodalom:

Pólya György: A gondolkodás iskolája
Akkord Kiadó, Budapest, 2000

Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztályok számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Ajánlott irodalom:

Pólya György: Indukció és analógia
Gondolat Kiadó, Budapest, 1988

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4., 5-6., 7-8. Feladatgyűjtemény
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2008

XIII. Geometriai transzformációk felismerése és alkalmazása a gyakorlatban

A geometriai transzformációk igen fontos helyet foglalnak el életünkben, csak az a kérdés, hogy ezt mennyire érzékeljük.
A síkon, térben történő mozgások geometriai modelljeinek felismerése, majd ezen ismeret alkalmazása a gyakorlatban az egyik legfontosabb kompetencia.
Keith Devlin így ír erről:

> „A geometria a világban alakot öltő mintázatok feltárásával foglalkozik. Az alakzatok legszembetűnőbb vonásai között azonban olyanok is akadnak, amelyek nem a szigorúan vett alakot, hanem a formát jellemzik: tipikusan ilyen a szimmetria. Egy hópehely vagy virág szimmetriája mindig valamilyen geometriai szabályszerűségből ered, így ennek vizsgálata mindig az alakzat mélyebb, absztraktabb vonásaira derít fényt. A mintázatok többnyire kellemes érzést váltanak ki bennünk, tanulmányozásukat ennél fogva a szépség matematikájának is nevezhetjük. A szimmetriák matematikai elmélete az alakzatok transzformációinak vizsgálatával kezdődik."
>
> (Keith Devlin: Matematika, a láthatatlan megjelenítése, Műszaki Kiadó, Budapest 2001)

A szerző gondolatait folytatva, és a matematikaoktatásunkra alkalmazva mondhatjuk, hogy a transzformációk tanításával is az a fő célunk, hogy a tanulók gondolkodási és problémamegoldó, összehasonlító, rendező, stb. képességét fejlesszük úgy, hogy mindezeket az ismereteket, illetve az így kapott képességeket a gyakorlatban is tudják alkalmazni tanulóink.

Akkor mondjuk, hogy a tanuló rendelkezik a geometriai transzformációk felismerésének és alkalmazásának kompetenciájával, ha felismeri a gyakorlati életben megfigyelhető mozgásokban az alapvető transzformációkat, és ezek függvényében tudja megtervezni tevékenységét.
Nevezetesen: ismerje fel az egybevágósági transzformációkat (eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, forgatás), és lássa ezeknek gyakorlati hasznát.

A használati tárgyakban, épületekben, egyéb alkotásokban ismerje fel a szimmetriákat, aminek alapján jobban megismeri az adott dolog, objektum tulajdonságait. Ez segíti az egyént abban, hogy ilyen, vagy ehhez hasonló tárgyakat tudjon megtervezni, elkészíteni, illetve tökéletesíteni és paramétereit optimalizálni. *A mozgásokban ismerje fel a két alapvető transzformációt, az eltolást és a forgatást, és ezt alkalmazza a gyakorlatban és a feladatmegoldásokban.*

Valójában az itt felsorolt képességek azok, amely miatt nem a „Tájékozódás térben és időben" kompetenciánál tárgyaltuk ezen képességek kialakításának lehetőségeit. Az előző ugyanis zömében a „statikus" geometriai ismeretekre épít (alakzatok tulajdonságai, alkotórészek kiszámítása, ábrázolásuk, stb.), míg az itt tárgyalt kompetencia a „dinamikus" (mozgásos) geometriai ismereteket feltételezi.

A transzformációk tanításánál alapkövetelmény a konkrét tárgyi tevékenység és a heurisztika. Ezeket a képességeket úgynevezett „krétamatematikával" nem lehet kialakítani, fejleszteni. A tanuló kezébe kell adni a vizsgálandó testeket, az ábrákat, fotókat, stb., ami alapján ő megsejt valamit, sejtését megfogalmazza, azt – saját szintjén – igazolja, vagy cáfolja.

Előljáróban – a konkrét feladatok elemzése előtt – nézzük meg, hogy bármelyik korosztályban hogyan készíthető elő, alakítható, fejleszthető ez a kompetencia.

Járművek mozgása (szánkó, körhinta, kerékpár, stb.); épületek, testek, geometriai alakzatok szimmetriája; térképek, tervrajzok, fényképek, kicsinyítés, nagyítás (látcső, mikroszkóp, projektor, GPS, stb.); színezések szimmetriája és aszimmetriája (csempeminták, szőttesek, hímzések, horgolások, tapéták stb.).

A sort még hosszan lehetne folytatni, de a természet szimmetriára való „törekvését" mindenképpen célszerű megmutatni. Nagyon szép képek készültek a hópelyhek hatszögszimmetriájáról, vagy a méhek által készített lép szimmetrikus hatszögletű alakjáról. Azt is érdemes megbeszélni, hogy a szappanhab buborék miért gömb alakú. Mindezekkel meg lehet mutatni, hogy ha követjük a természet alkotásainak formáját, akkor optimatizálhatjuk a saját munkánkat is.

Például a méhek a lépet sejtről, sejtre építik fel, és különlegesen „jól képzett geométerek" lévén, az evolúció során beléjük programozódott az a képesség, hogy a matematikailag a leghatékonyabb elrendezést valósítsák meg. Itt azt is célszerű megvizsgálni, hogy miért éppen hatszögalakúak a lép sejtjei.

Matematikailag: milyen szabályos sokszögekkel lehet lefedni a síkot.

A hópehely szimmetriájára az a magyarázat, hogy egy hópehely sok-sok parányi, egyforma, hatszög alakú jégkristály szemcsékből áll össze, ahogy a különböző hőmérsékletű légrétegeken keresztülhalad.

Az ilyen modellekkel, példákkal, szemléltető anyagokkal tudjuk érdekessé tenni a transzformációk tanítását, és ilyen példákon keresztül mutathatjuk meg a témakör gyakorlati hasznát is.
Alsó tagozatban még nem alakíthatjuk ki a transzformációk tulajdonságait, de érdekes példákkal megalapozhatjuk.
Például:

> Rajzolj egy 2 cm sugarú félkört! Tedd a tükröd a papírlapra úgy, hogy a félkör és a tükörkép együtt a) félkör legyen, b) egy egész kör legyen, c) egy háromnegyed kör legyen!

Felső tagozatban a következő érdekes játékkal tudjuk megmutatni a középpontos hasonlóság tulajdonságait és ismeretének gyakorlati hasznát.
Például:

> Van egy kör alakú asztal, és két játékos felváltva tesz 10 Ft-os pénzérméket az asztalra. Az nyer, aki utoljára úgy tette le az érmét, hogy az nem esik le az asztalról. (A pénzérmék nem fedhetik egymást.)
> Mi lehet a nyerő stratégia?
> Bizonyítsuk be, hogy helyes stratégia megválasztásával mindig a kezdő játékos nyer!

(Megoldás: A kezdő játékos a kör középpontjába rakja az érmét, majd mindig oda, hogy a második játékos által lerakott érmének a középpontosan tükrös képe legyen az ő érméje.)

Az ilyen jellegű feladattal – a motováción túl – még azt is el tudjuk érni, hogy a tanuló játszva tanulja meg a középpontos tükrözés tulajdonságait.

Az eltolás gyakorlatban történő alkalmazására mutatunk be egy példát a 9. osztályos tankönyvből.

> „Hogyan kell megépíteni a legrövidebb vezetéket két olyan üzem között, amelyek egy széles folyó két különböző oldalán, a folyóparttól távolabb helyezkednek el? A vezeték a folyót csak merőlegesen keresztezheti.”
> (Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 9. 5. 33.)

Megoldás:
1) Készítsünk rajzot (Párhuzamos egyenes pár jelentse a folyót, a parttól d_1 távolságra egy A pont az egyik üzemet, és d_2 távolságra a másik oldalon a B pont a másik üzemet.

A folyó szélességét jelöljük *d*-vel.

2) Toljuk el az *A* pontot a folyópartra merőlegesen a folyó irányába *d* hosszúságú vektorral. Ez lesz az *A*' pont.

3) Kössük össze egyenes vonallal az *A*'-t a *B*-vel.

4) Ahol ez az egyenes metszi a folyó *B* pont felőli pontját, ott kell merőlegesen átvezetni a vezetéket.

5) A part két oldalán a merőlegessel kapott metszéspontokat összekötjük az *A*, illetve a *B* ponttal.

6) Még igazolnunk kell, hogy valóban ez a legrövidebb vezetékhossz. Ehhez bárhol, máshol felveszünk egy pontot a folyó partján, és a háromszög egyenlőtlenség felhasználásával igazoljuk, hogy az így megszerkesztett távolság nagyobb lesz az általunk eredetileg szerkesztett távolságnál.

Azon túl, hogy egyéb ismeretek is szükségesek a feladat megoldásához, (vektor, háromszög egyenlőtlenség stb.) az eltolás tulajdonságait felhasználva, a pont képét megszerkesztve, alakíthatjuk ki a tanulókban a geometriai transzformáció felismerésének és alkalmazásának kompetenciáját.

Egyébként akkor tanítjuk jól a geometriát, ha mindig ábra felvétele és elemzése előzi meg a tervkészítést, a megoldást és az ellenőrzést. Ekkor biztosított ugyanis az, hogy a képi dominanciájú gondolkodás átvált fogalmi gondolkodásba, ami egész matematikatanításunk egyik fő célja. Így alakíthatjuk ki a bevezető részben felsorolt legtöbb, transzformációval és szimmetriával kapcsolatos, kompetenciát

Kulcsszavak

síkmozgás, térmozgás

egybevágósági transzformációk

hasonlósági transzformációk

szimmetrikus alakzatok

szimmetriák a gyakorlatban

optimális elrendezés

nyerő stratégia

Kérdések, feladatok:

1) Mi jellemzi a geometriai transzformáció felismerésének és alkalmazásának kompetenciáját?
2) Keressen az internetről tengelyesen és középpontosan szimmetrikus híres épületeket!
3) Mindegyik transzformációhoz készítsen olyan feladatsort, amellyel a képi dominanciájú gondolkodástól eljuttatja a tanulót a fogalmi gondolkodásig!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010
3. Pólya György: A gondolkodás iskolája
Akkord Kiadó, Budapest, 2000

Ajánlott irodalom:

Keith Devlin: Matematika, a láthatatlan megjelenítése
Műszaki Kiadó, Budapest, 2001
Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4., 5-6., 7-8. Feladatgyűjtemény
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2008

XIV. A valószínűségszámítás alkalmazása a mindennapi életben

A valószínűségszámítás nem túl régen került a magyar matematikatanítás témakörei közé. A szomszédos országokban már lényegesen korábban bekerült a közoktatás tananyagába. A nemzetközi felmérésekben is egyre gyakrabban feltűntek ilyen feladatok, és ezekben a magyar diákok gyengébben teljesítettek, mint más országok diákjai. Pedig olyan ismeretek tanításáról van szó, amely a gyakorlatban való eligazodást, a gazdasági, pénzügyi tervezést nagymértékben segíti.

A valószínűség ugyan a szerencsejátékoknak köszönheti megszületését, de a gazdasági, üzleti élet is hamarosan eszközei közé sorolta ezt a tudományágat. Az ember megdöbben azon, hogy milyen kicsi a nyerési esély a lottón, és mégis százezrek lottóznak hétről hétre.

A biztosító társaságok is azután jöttek létre, miután felmérték, hogy milyen feltételekkel köthetnek szerződést az ügyfelekkel, mikor nyereséges nekik ez az üzlet. Ehhez szükségesek voltak a valószínűségszámítás ismeretei.

Például az életbiztosításoknál megvizsgálják, hogy milyen korban, milyen gyakorisággal halnak meg az emberek. Vizsgálják, hogy milyen az egészségi állapotuk, mi a foglalkozásuk, melyik korosztályhoz tartoznak, stb.

Hasonlóak igazak például a lakás, a casco, a nyugdíjbiztosításra is. Amikor biztosítást kötünk, akkor a biztosító társaság megbecsüli, hogy mi a valószínűsége annak, hogy lakásunkat kár éri (vihar, árvíz, földrengés, stb.), hogy autónk karambolban összetörik (akár mi idézzük elő a balesetet, akár más), vagy rendes körülmények között hány évig kell fizetniük számunkra a nyugdíjat.

A rendszer azért működőképes, mert a káresemények valószínűségét a matematika segítségével határozzák meg, amit sok-sok korábban begyűjtött adat feldolgozása után tesznek meg. Így érhetik el a társaságok azt, hogy hosszú távon nyereségesek legyenek. Amennyiben az egyén nem tudja felmérni esélyeit, úgy járhat, mint a 2009-2010-es években sok-sok ember, akinek oly mértékben megnőtt a devizaalapú hitelének a törlesztő részlete, hogy képtelen volt azt fizetni. A bankok kiszámolták, hogy számukra a hitel mikor jövedelmező, de az egyének ezt nem tették meg. Nem is voltak rá képesek, mert nagyon sok volt a bizonytalansági faktor (munkahely, egészség, egyéb nem kalkulálható veszteség, stb.).

Az itt elmondottak mind azt igazolják, hogy a gyakorlati életben nagyon fontos, hogy *az ember tudjon tervezni, kalkulálni, szerződést kötni, tudja, hogy milyen kötelezettségeket vállalhat.*

Mindehhez az kell, hogy *ismerje meg a feltételeket, vizsgálja meg a köztük lévő összefüggéseket, gondolja végig az események bekövetkezésének gyakoriságát, valószínűségét, és ennek függvényében döntsön.* Ennek a kompetenciának a kialakítása, fejlesztése matematikatanításunk egyik fontos célja.

Már alsó tagozatban megkezdhetjük olyan fogalmak kialakítását, mint kísérlet, esemény, elemi esemény, kedvező eset, összes eset, gyakoriság, relatív gyakoriság valószínűsége, biztos esemény, lehetetlen esemény.

Mindezeket természetesen konkrét példákon, manipulatív tevékenység kapcsán alakíthatjuk ki. Például: pénzfeldobás, kockadobás, dobozból golyók véletlenszerű kihúzása, számkártyákból kirakható számok közül milyen tulajdonságúból hány lehet, stb.

Felső tagozatban már bevezethetjük a szerencsejátékokat, kiemelve a nyerési esély nagyon kicsiny voltát. (Szerencsés megmutatnunk az úgynevezett „félkarú rablók", a nyerőgépek veszélyeit. Általános iskolában zömében relatív gyakoriságot és kombinatorikus valószínűséget számolunk – egyszerűbb esetekben.

Középiskolában – szintén egyszerű feladatokkal – már tanítjuk a kombinatorikus és a geometriai valószínűséget, valamint az eloszlásokat is.

Példaként nézzünk egy kombinatorikai valószínűséghez kapcsolódó feladatot!

„Egy műhelyben egy műszak alatt elkészített 1400 darab kulcs közül 50 darab selejtes. Találomra kiveszünk 20 darabot. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott kulcsok között:

a) nem lesz egyetlen selejtes sem,
b) nem lesz háromnál több selejtes?

(Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából, 3310.)

Gondoljunk arra, hogy n különböző elemből hányféleképpen lehet k – t kiválasztani. Határozzuk meg a kedvező és az összes esetek számát, majd határozzuk meg a valószínűségeket!

(A megoldást az olvasóra bízzuk.)

Összegezve: a mindennapi életben nagyon ritkán tudunk egzakt értékekkel dolgozni. Az embert különböző – sokszor egymásnak ellentmondó, egymást kioltó – hatások sokasága éri. Több feltételt kell figyelembe venni, az ezek közti kapcsolatokat összevetni az optimális cselekvéshez. (Legyen ez a cselekvés szerencsejáték, biztosítás, utazás, időjárás, hitel, stb.)

A társadalmi beilleszkedéshez, tevékenységhez nélkülözhetetlen a valószínűségi szemléletmód kompetenciájának kialakulása.

Kulcsszavak

üzleti élet , tranzakciók

szerencsejátékok

események, elemi események

gyakoriság

relatív gyakoriság

valószínűség

Kérdések, feladatok:

1) Mit értünk a valószínűségi szemléletmódon?

2) Keressen a Hajdu-féle felső tankönyvcsalád tankönyveiből olyan feladatokat, amelyekkel alsó tagozatban megalapozhatja, felső tagozatban kialakíthatja, középiskolában elmélyítheti a valószínűségszámítás alapjait!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Ajánlott irodalom:

Keith Devlin: Matematika, a láthatatlan megjelenítése
Műszaki Kiadó, Budapest, 2001

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika 3-4., 5-6., 7-8. Feladatgyűjtemény
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2008

Javaslat a tananyag feldolgozásának ütemezésére

A félév során 12 hétre tervezzen:

1. hét:

Az iskolai matematikaoktatás helyzete, a matematikatanítás cél-, feladat- és követelményrendszere.

2. hét:

Az értékes, érvényes, hasznosítható tudás.

3. hét:

A matematikai ismeretszerzés.

4. hét:

Képességek, jártasságok, készségek kialakítása.

5. hét:

Értő olvasás, problémamegoldás, számolási készség kialakítása.

6. hét:

Gondolkodási műveletek kialakítása, fejlesztése.

7. hét:

Kreatív személyiségtulajdonságok kialakítása, fejlesztése.

8. hét:

Algoritmikus és tervszerű gondolkodás kialakítása, fejlesztése.

9. hét:

Kombinatorikus és függvényszerű gondolkodásmód, gyakorlati alkalmazhatóság kialakítása, fejlesztése.

10. hét:

Térben és időben való tájékozódási képesség kialakítása, fejlesztése.

11. hét:

Bizonyítási igény, ítélőképesség kialakítása, fejlesztése.

12. hét:

Valószínűségszámítás a mindennapi életben.

Záróvizsga tételek:

1) Az iskolai matematikatanítás, helyzete, problémái, feladatai.
2) Az iskolai matematikatanítás cél-, feladat- és követelményrendszere. Nevelési-, oktatási-, képzési célok.
3) Az értékes, érvényes, hasznosítható tudás jellemzői.
4) A tanárképzés során kialakítandó tanári kompetenciák jellemzői, és kialakításának módjai.
5) Az iskolai oktatásban kialakítandó tanulói kompetenciák ismérvei.
6) A matematikai ismeretelsajátítás Pólya-féle és skempi elmélete.
7) Képességek, készségek, jártasságok kialakításának módjai.
8) Az értő olvasás kialakítása, fejlesztése.
9) A problémamegoldásra való képesség kialakítása, fejlesztése.
10) A számolási készség kialakítása, fejlesztése.
11) A gondolkodási műveletekben való jártasság kialakítása, fejlesztése.
12) A kreatív személyiségtulajdonságok kialakítása, fejlesztése.
13) Az algoritmikus gondolkodásra való képesség kialakítása, fejlesztése.
14) A megoldás megtervezése képesség kialakítása, fejlesztése.
15) A kombinatorikus gondolkodás kialakítása, fejlesztése.
16) A gyakorlati alkalmazásra való képesség kialakítása, fejlesztése.
17) A függvényszerű gondolkodásmód kialakítása, fejlesztése.
18) Tájékozódás térben és időben kompetencia kialakítása, fejlesztése.
19) A bizonyításra és ítélőképességre való képesség kialakítása, fejlesztése.
20) A geometriai transzformációk gyakorlati alkalmazásának képessége.
21) Valószínűségszámítás a gyakorlatban.