

Dr. Czeglédy István: A matematika tanításának pedagógiai – pszichológiai vonatkozásai**Bevezetés**

Üdvözlöm!

Ez a jegyzet azoknak íródott, akik valamilyen módon kötődnek a matematikatanításhoz. Lehetnek ezek a személyek érdeklődő matematika szakos hallgatók valamelyik felsőoktatási intézményből, vagy olyan matematikatanárok, akik hívei az innovációnak, akik szeretnék megújítani, bővíteni, felfrissíteni a matematikatanítással kapcsolatos ismereteiket.

Ebben a jegyzetben segítséget kívánunk adni ahhoz, hogy – a jegyzet áttanulmányozása után – választ tudjanak adni arra a kérdésre, hogy mit, miért és hogyan tanítsunk matematikából, továbbá, hogyan válasszunk meg mintapéldákat ahhoz, hogy optimálisan fejlesszük tanítványainkat minden téren. Ahhoz is, hogy milyen kritériumoknak kell megfelelnie a gyakorlásnak, az ellenőrzésnek, az értékelésnek, valamint ehhez milyen tanulást segítő eszközök használhatók.

Felméréseink szerint a 6-10 éves korosztály esetében a matematika tantárgy „tetszési indexe” az első három hely valamelyikén van. Felső tagozatban ez a mutató már a középmezőnybe, (esetleg egy kicsit feljebb) sorolja a matematikát, míg a középfokú oktatásban a matematika népszerűsége erősen csökken, hiszen a 16-18 éves korosztálynál az alsó harmadba – tehát a kevésbé szeretett tárgyak közé – sorolják a tanulók ezt a tantárgyat. Ennek a csökkenő tendenciának több oka van, és ez az ok nem feltétlenül a matematikai tartalomban keresendő. Sokkal inkább abban, hogy a matematikai ismereteket nem megfelelő módon közvetítjük a tanulóknak, vagy hiányzik a motiváció, vagy nincs meg az egymásra építettség – fokozatosság – rendszer, vagy a tanulók számára nem megfelelő munkaformát, módszert, eszközt választottunk az adott tanórára stb. A sort még lehetne folytatni. Minden esetre az a gyanúnk, hogy tanításunk eredményességének a hiányosságai a tanár pedagógiai, pszichológiai és módszertani kultúráltságának hiányosságaira vezethetők vissza.

Ezzel a jegyzettel olyan ismeretelsajátítási módokat kívánunk a tanárjelöltek és a gyakorló tanárok kezébe adni, amelyekkel munkájuk eredményessége növelhető, s amelyek

alkalmazása után a diák nem unalmas, lélekölő munkának tartja a matematikatanulást, hanem érdekes, élvezetes, szórakoztató munkának.

Fő célkitűzéseink:

Az eddig elmondottak tükrében nyilvánvaló, hogy azt kívánjuk elemezni ebben a jegyzetben, hogy:

- az egyes témakörök tanításában milyen motivációs lehetőségek rejlenek,
- milyen munkaformák, módszerek, eszközök, hogyan alkalmazhatók az egyes témakörök tanításában,
- milyen ellenőrzési, értékelési formákat célszerű alkalmaznunk,
- hogyan válasszuk ki a mintapéldákat ahhoz, hogy a nagyon fontos funkciójukat betöltsék,
- hogyan építsünk fel egy órát úgy, hogy a pedagógiai – pszichológiai alapelvek maradéktalanul teljesüljenek.

Ebből a felsorolásból az is kiderül, hogy a pedagógus tevékenysége nem kerülhető ki, nem bagatellizálható el. A tanár a jó tanítás-tanulás kulcsfigurája. (Ez akkor is igaz, ha a világ legjobb, vagy legrosszabb tankönyvét, oktatási segédanyagát adjuk a tanulóknak, tanároknak kezébe.)

Tanulási időszükséglet

Változó. Gyakorlattal rendelkező matematikatanárok viszonylag rövid idő alatt elsajátíthatják a jegyzetben leírt dolgokat, és ezeket kevés gyakorlás után már alkalmazni is tudják. A matematika szakos hallgatóknak az elmélet tanulmányozásán túl az is szükséges, hogy az egyes tanulási stratégiákat feladatok elemzésén keresztül begyakorolják, mielőtt részt vennének a gyakorlóiskolában letöltendő tanítási gyakorlaton. Ez utóbbi csoportnak egy féléves kurzust (12 hét, hetente egy-egy témakör) javasolunk.

Célkitűzések, követelmények

Reményeink szerint a kurzus elvégzése után az olvasóban kialakulnak, illetve továbbfejlődnek az alábbi tanári kompetenciák:

- a tanulás tanítása,
- változatos munkaformák, módszerek, eszközök alkalmazása,
- megfelelő motivációs bázis kialakítására való képesség,

- megfelelő kérdéstechnika, kérdéskultúra,
- pedagógiai, pszichológiai, módszertani kulturáltság,
- differenciálásra, figyelem-megosztottságra való képesség,
- a tananyag rendszerező felépítésére való képesség,
- változatos és megfelelő ellenőrzési és értékelési módok,
- mérések szakszerű megtervezése, lebonyolítása.

I. A matematikatanítás cél-, feladat-, és követelményrendszere

A következő tanmese azt mutatja meg, hogy milyen fontos tevékenységünkben a céltudatosság.

Íme a mese:

A kis tengeri csikó elindult világot látni. Útközben találkozik az angolnával.

- Hová, hová kis tengeri csikó?
- Megyek világot látni.
- Nagyon jó, hogy találkoztunk. Ha az uszonyaimból néhányat megveszel, tízszer olyan gyorsan tudsz haladni.

Az üzletet megkötötték, és a kis tengeri csikó tízszer olyan gyorsan haladt célja felé, mignem találkozott a polippal.

- Hová, hová kis tengeri csikó?
- Megyek világot látni.
- Nagyon jó, hogy találkoztunk, mert, ha megveszed ezt a pár lökhajtásos uszonyomat, nagyon gyorsan célba érhetsz.

Az üzlet ismét megkötötték, és valóban, a kis tengeri csikó még gyorsabban haladt a célja felé, mignem találkozott a cápával.

- Hová, hová kis tengeri csikó?
- Megyek világot látni.
- Nagyon jó, hogy találkoztunk, mert én meg tudom neked mutatni a célhoz vezető utat – mutatott a cápa a hatalmasra kitért szájával.

A kis tengeri csikó megköszönte az útbaigazítást, beúszott a cápa gyomrába, és annak rendje – módja szerint ott elpusztult.

A tanulság: Ha nem tudjuk, hogy hova akarunk eljutni, ha nem látjuk utunk célját, elképzelhető, hogy egészen máshol kötünk ki, mint ahol szerettünk volna.

Lefordítva ezt a matematikatanítás nyelvére, ha egy pedagógus nem tűzi ki maga elé pontosan azokat a célokat, amiket tanítványaival el akar érni, elképzelhető, hogy egészen más tulajdonságokat alakít ki, mint amit szeretett volna. Ezzel a kis tanmesével az „ad hoc” módon végrehajtott – nem tervszerű, nem céltudatos – tanári tevékenység veszélyeire kívántuk felhívni a figyelmet. Ha ehhez még adalékként járul a motiváció hiánya, akkor még nagyobb a baj, még messzebb kerülünk kitűzött céljainktól.

Pólya György így ír erről a Gondolkodás iskolája című könyvében: Nincs annál lehangolóbb, mint olyan célok eléréséért küzdeni, amit nem tűztünk ki magunk elé. (Pólya után szabadon.)

Kelemen László írja a Pedagógiai pszichológia című könyvében:

„Mivel a nevelés személyiségfejlesztés, s ennek egyik alapvető formája az iskolai tanulás, az *iskolai nevelés és oktatás tartalma meghatározó jellegű* a nevelés és az oktatás egész folyamatában, azaz a személyiség alakításában. A nevelés és az oktatás tartalmában tükröződnie kell nevelési céljainknak, ennek kell megfeleltetni nevelési és oktatási feladatainkat, s ez közvetíti mindazokat a *társadalmi eszméket, kultúrértékeket és –viszonyokat*, amelyeket a tanulók számára közvetíteni akarunk.”

Minden országban, mindenfajta társadalmi berendezkedésben döntő kérdés, hogy mire nevel, mit tanít az iskola. Ebből az is következik, hogy az oktatás tartalmát, formáját, követelményeit, céljait a társadalom elvárásai határozzák meg, de befolyásolják pedagógiai, pszichológia szempontok is.

A nevelési, oktatási tervek elkészítésénél azt is figyelembe kell venni, hogy az egyes tárgyak milyen pszichés tulajdonságokat, milyen pszichológiai képességeket alakítanak ki, fejlesztenek. A tanárok bizonyos tantervi kínálatokból választják ki a számukra, az iskola és a tanulók számára legmegfelelőbbet, s ezeket adaptálják helyi körülményekre. A tanterv keretet ad, lehetőséget kínál a tanárnak, bizonyos kötöttségekkel. A kötöttségeket, a követelményeket a tanulók, a szülők, az iskola, a társadalom és a továbbhaladás igényei szabják meg.

Elmondhatjuk, hogy akármilyen társadalmi rendszerben, bármilyen követelményeknek megfelelően is tanítunk, a nem céltudatos, nem célorientált tanítás nagy valószínűséggel eredménytelen lesz.

A kerettantervek és a helyi tantervek alapja a Nemzeti alaptanterv. A 243/2003 (XII. 17) Kormányrendelet melléklete a következőket írja:

„A magyar oktatásügyben a Nemzeti alaptanterv a tartalmi-tantervi szabályozás legmagasabb szintű dokumentuma. *Fő funkciója* a közoktatás nélkülözhetetlen elvi, szemléleti megalapozása úgy, hogy egyben biztosítsa az iskolák tartalmi önállóságát. Meghatározza a közoktatás országosan érvényes általános céljait, a közvetítendő műveltség fő területeit, a közoktatás tartalmi szakaszolását és az egyes tartalmi szakaszokban érvényesülő fejlesztési feladatokat. A NAT az iskolában elsajátítandó *műveltség alapjait* foglalja össze, és ezzel biztosítja a közoktatás egységességét és koherenciáját.

A tartalmi-tantervi szabályozás második szintjén a NAT szellemiségét kifejező, de annál részletesebb útmutatást nyújtó *kerettantervek* találhatóak. A NAT-tal együtt ezek a kerettantervek orientálják a tankönyvek íróit és szerkesztőit, a tanítási segédletek és eszközök készítőit, az állami vizsgák követelményrendszereinek a kidolgozóit, az országos mérési-értékelési eszközöknek a kidolgozóit és legfőképpen az iskolák pedagógustestületeit, akik a helyi tanterveket készítik, illetve összeállítják.

A tartalmi-tantervi szabályozás harmadik szintjét az iskolák *helyi tantervei* képezik. A helyi tantervek iránti alapvető követelmény (egyben engedélyezésük kritériuma is), hogy megfeleljenek a NAT előírásainak. Az iskolák pedagógustestületei háromféle módon készíthetik el helyi tanterveiket: a) az iskola átvesz egy kész kerettantervet; b) az iskola a tantervek, oktatási programok, programcsomagok kínálata alapján állítja össze helyi tantervét; c) saját helyi tantervet készít, vagy ilyennel már rendelkezik. A kész tantervek átvétele vagy saját tanterv kidolgozása esetén figyelembe kell venni az állami vizsgák követelményeit is. Látható, hogy a legnagyobb mértékű alkalmazkodást a helyi körülményekhez a harmadik variáns teszi lehetővé, de a másik kettő választása esetén is rendelkezik az iskola önálló mozgástérrel. A *háromszintű tartalmi-tantervi szabályozási rendszer* – külföldi és hazai tapasztalatok alapján – kellően biztosítja a közös műveltségi alapok érvényesülését, elősegíti az iskolák alkalmazkodását helyi körülményeikhez, illetve lehetőséget ad az önálló intézményi profil felmutatására.

A NAT kiemelt fejlesztési területei

- énkép, önismeret
- hon- és népismeret
- európai azonosságtudat
- környezeti nevelés
- információs és kommunikációs kultúra
- tanulás

- testi, lelki egészség
- felkészülés a felnőtt lét szerepére

Mindezen területek fejlesztését úgynevezett műveltségi területekben, és nem tantárgyakban kívánja elérni.

(A szerző megjegyzése: ez utóbbi törekvést nem sikerült megvalósítani, mert az iskolákban sem a személyi, sem a tárgyi feltételek nem voltak meg – és ma sincsenek meg – ahhoz, hogy a korábbi szaktárgyi struktúrát felváltsa a műveltségi területek struktúrája.)

A NAT által meghatározott műveltségi területek:

- Magyar nyelv és irodalom
- Élő idegen nyelv
- Matematika
- Ember és társadalom
- Ember a természetben
- Földünk-környezetünk
- Művészetek
- Informatika
- Életvitel és gyakorlati ismeretek
- Testnevelés és sport

II. Az iskolai matematikatanítás alapelve és céljai

Az iskolai matematikatanítás célja, hogy a megfelelő nevelő, orientáló és irányító funkciók ellátásával lehetőleg hiteles – ezért egységes, összefüggő – képet nyújtson a matematikáról, nemcsak, mint kész, merev ismeretrendszerrel, hanem, mint sajátos emberi megismerési tevékenységről, szellemi magatartásról. A matematikatanítás formálja és gazdagítja az egész személyiséget, a gondolkodást érzelmi és motivációs vonatkozásokban egyaránt, alkalmazásra érett ismereteket nyújt. A matematikai gondolkodás területeinek fejlesztésével emeli a gondolkodás általános kultúráját. Szerepe a matematika különböző arculatainak bemutatása és érvényre juttatása, úgymint: kulturális örökség, gondolkodásmód, alkotótevékenység, a gondolkodás örömeinek forrása, a mintákban, struktúrákban

tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője, tudomány, egyéb tudományok segítője, az iskolai tantárgyak segítője, a mindennapi élet és a szakmák eszköze.

A matematika műveltségi terület fejlesztésének kiemelt területei a következők:

- a személyiség tiszteletére nevelés;
- a beszélt és írott kommunikációs kultúra: mások szóban és írásban közölt gondolatmenetének meghallgatása, megértése; saját gondolatok közlése; a jelenségek értelmezéséhez illeszkedő érvek keresése; az érveken alapuló vitakészség fejlesztése;
- a matematika természettudományokban, társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában betöltött fontos szerepének az értése, a döntési kompetencia fejlesztése;
- a modellek érvényességi körének és a gyakorlatban való alkalmazhatóságának eldöntésére alkalmas kompetenciák és képességek kialakítása;
- a jelenségekhez illeszkedő modellek, gondolkodásmódok (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszerek (aritmetikai, algebrai, geometriai, koordináta-geometriai, statisztikai stb.) és leírások kiválasztásának és alkalmazásának tudása;
- a matematikai ismeretek gyakorlati tudása;
- hozzájárulás a történeti szemléletmód kialakításához;
- a tanulás, a matematikatanulás szokásainak, képességének alakítása;
- a reprodukzív, problémamegoldó, alkotó gondolkodásmód fejlesztése;
- a pontos, kitartó, fegyelmezett munka végzése, az önellenőrzés igénye, módszereinek megismerése és alkalmazása;
- alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai műveletek, transzformációk) automatizált végzése.

A fejlesztési feladatok szerkezete:

Tájékozódás

- Tájékozódás térben
- Tájékozódás időben
- Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban

Megismerés

- Tapasztalatszerzés

- Képzelet
- Emlékezés
- Gondolkodás
- Ismeretek rendszerezése
- Ismerethordozók használata

Ismeretek alkalmazása

Problémakezelés és –megoldás

Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás

Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek fejlesztése

- Kommunikáció
- Együttműködés
- Motiváltság
- Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás

A matematika épülésének elveiben való tájékozottság

A fenti fejlesztési területeket a matematika tanítása során tudatosan terveznünk kell. Ez a fejlesztés nem „mennyiségi”, hanem a tanulók tempójának megfelelő minőségi fejlesztés kell, hogy legyen. Természetesen nem lehet valamennyi fejlesztési cél mindig egyaránt hangsúlyos. Egy-egy tevékenység során a helyzetnek megfelelően állapítja meg a tanár azokat, amelyeket kiemelten szem előtt kíván tartani.

A matematikatanításban talán még a többi tárgynál is erősebben kell érvényesülni a céltudatosságnak. (Elég csak a fogalmak közti szoros kapcsolatra, az egymásraépítettségre, a fokozatosságra és a feladatokban fellelhető nevelési lehetőségekre gondolni.)

„A cél: a működés kiváltója, alapmotívuma, alapja, végső értelme. A célnak olyan formában kell megjelennie, hogy a tervezés, az intézkedés és az értékelés alapja legyen.”

(Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet

Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000)

A NAT célkitűzéseit figyelembe véve a tanítási-tanulási folyamat céljait három területre oszthatjuk:

- nevelési célok, célrendszerek,
- oktatási célok, célrendszerek,

- képzési célok, célrendszerek.

Ezek szétválasztása kicsit mesterkéltnak tűnhet, mert minden oktatási cél megvalósítása egyben bizonyos nevelési, képzési célok megvalósítását is eredményezi és viszont. Tehát a három célrendszer együtt irányítja a pedagógiai folyamatot. Ennek ellenére azért kezeljük külön őket, mert így jobban rávilágíthatunk az egyes célok specifikumaira.

Nevelési cél: A társadalmi beilleszkedéshez, tevékenységhez nélkülözhetetlen pszichés tulajdonságok kialakítása, fejlesztése. A nevelési célok megvalósíthatóságának fő területei:

- *a tananyag tartalma* (a matematikai tartalmak szövegezése, tételek bizonyítása, állítások logikai értéke, gyakorlati vonatkozások stb.)
- *a választott munkaforma, módszer, eszköz* (a tanulók közös tevékenysége, vitakészség, manipulatív tevékenység stb.)
- *a tanár személyisége* (pontosság, egyszerűség, következetesség stb.)

A célok lehetnek rövid-, közép- és hosszútávúak. A nevelési célok leginkább a hosszútávú célok közé sorolhatók. A nevelési célok nem valósíthatók meg egy órán. Hosszú évek kitartó, következetes munkája szükséges a tanár részéről ahhoz, hogy a tanulók a tanár által kitűzött célokat elérjék. Az oktatási célok legtöbbször rövid- vagy középtávú cél, míg a képzési célok leginkább közép- és a hosszútávú célok kategóriájába tartoznak. Például a számolási készség középtávú, míg az értő olvasás hosszútávú célként jelenik meg oktatásunkban.

A nevelési célokat Ágoston György munkája felhasználásával két dimenzióban elemezzük. Az egyik dimenzió a nevelés tartalma, a másik a pszichikus tartományok.

A nevelési tartalma szerint a matematikatanításban megkülönböztetünk:

- tudományos nevelést,
- erkölcsi nevelést,
- esztétikai nevelést;

a pszichikus tartományok szerint:

- értelmi tartományt,
- érzelmi-akarati tartományt,
- pszichomotoros tartományt.

Az egyenletek témakörben egy konkrét példán keresztül vizsgáljuk meg, hogyan alkalmazható ez a gyakorlatban.

	Értelmi	Érzelmi	Pszichomotoros
Tudományos Nevelés	Kreatív személyiségtulajdonságok fejlesztése (problémaérzékenység, eredetiség, újrafogalmazás)	Kíváncsiság, igény újszerű megoldások keresésére	Beszédkésztség

Mindez megvalósítható, ha szöveges feladat megoldása során szöveghez kérünk tervet, nyitott mondatot és viszont, nyitott mondathoz kérünk szöveget. (Főleg ez utóbbi fejleszt több kreatív személyiségtulajdonságot.)

„Oktatási – képzési célon a konkrét (matematikai) tartalomhoz közvetlenül kapcsolódó pszichikus folyamatok, képződmények és tulajdonságok valamely rendszerének kialakítását, illetve fejlesztését értjük.”

(Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000)

(Élmények, képzetek, ismeretek, gondolkodási műveletek, fogalmak, értelmi cselekvési tervek, képességek, készségek, beállítódások stb.) Itt sem – mint a nevelési céloknál sem – érvényes az egy óra egy cél modell. Egyrészt egy órán az oktatási-képzési célok sokasága kerül előtérbe, másrészt egyazon tartalommal különböző felkészültségű és fejlettségű tanulóknál más és más célokat tudunk elérni. Végül a legtöbb matematikai ismeretnél több óra szükséges ahhoz, hogy a hallott fogalmat, ismeretet a tanuló elsajátítsa.

Az oktatási célok tervezésénél javasoljuk a következő felépítési módot!

1. Terminológia, rutinok

(Matematikai szakszavak, elnevezések, cselekvések, amelyek a tanítás során, az adott órán előfordulnak.)

2. Fogalmak, összefüggések

(Nem biztos, hogy, ha használ a tanuló egy terminológiát, akkor azzal teljesen tisztában is van. Például 5. osztályban használják a racionális szám elnevezést, de valódi értelmét csak 7., 8. osztályban sajátítják el.)

Ebben a fázisban felsoroljuk mindazon fogalmakat, összefüggéseket, algoritmusokat, amelyek az órán valamilyen formában szóba kerülnek.

3. Közvetlen alkalmazás

Az adott ismeret bevéését, begyakorlását segíti elő. Kevés rejtett állítást tartalmazó egy- legfeljebb kétműveletes feladatok tartoznak ide. Ez inkább reprodukív tanulói tevékenység.

4. Alkotó alkalmazás

Több rejtett állítást tartalmazó, az ismeretek alkalmazását problémaszituációkban, egyéb matematikai összefüggésekben igénylő feladatok sorolhatók ide.

Produktív tanulói tevékenység.

Célszerű mindegyik oktatási célnál feltüntetni, hogy melyik ismeretet milyen szinten kérjük a tanulóktól (tárgyi tevékenység felhasználásával, tanári segítséggel, maximális begyakorlottsággal stb.). amennyiben az oktatási-képzési célok tervezésénél követjük ezt a felosztást, kisebb annak a valószínűsége, hogy egy adott órán olyan fogalomra építünk egy másik fogalmat, amit még nem ismernek a tanulók, hiszen a terminológiák, a fogalmak, összefüggések biztosítják a fogalmak egymásraépíthettségét.

Mind a nevelési, mind az oktatási-, képzési célok megfogalmazását főleg a kevés gyakorlattal rendelkező olvasónak ajánljuk figyelmébe, de a több éves, évtizedes gyakorlattal rendelkező pedagógusoknak sem árt, ha megtervezi céljait az órákra való felkészüléskor.

Végül, mintegy összefoglalásképpen vizsgáljuk meg, hogy a nevelési-oktatási-képzési célok tervezésénél milyen szempontokat kell még figyelembe vennünk:

1. Az iskolatípus

Állami, egyházi, alapítványi magán általános iskola, hatosztályos gimnázium, nyolcosztályos gimnázium stb.

Más-más iskolatípusban változhat a tananyag tartalma, a követelmény, a feldolgozás sorrendje, a módszer, a munkaforma, az eszköz stb.. így ennek megfelelően más és más lesz az elsajátítandó cél is, mások lesznek a nevelési feladatok is. Ez társadalmi kompetencia. A pedagógus alkalmazkodik, elfogadja a feltételeket.

2. *A tananyag elemzése az elért pszichés tulajdonságok szemszögéből*

(Tudás, képesség, szemléletek, meggyőződés, szokások stb.)

Az adott anyagrész tanításakor a több azonos tartalmú feladat közül azt célszerű az órán feldolgozni, amellyel több célt tudunk megvalósítani. Például Pitagorasz tételét megtaníthatjuk úgy is, hogy kimondjuk a tételt és bizonyítjuk, vagy úgy is, hogy hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű háromszögre megvizsgáljuk a tanulókkal az oldalak négyzete közti összefüggést. Az általános iskolás gyerek az első esetben nagy valószínűséggel passzív befogadó lesz, – elfogadja a tanári magyarázatot – míg a második esetben tevékenykedik, sejtést fogalmaz meg, ezeket néhány egyszerű példával megerősíti, majd – tanári segítséggel – bizonyítja azt. A két eljárásból nyilvánvaló, hogy a második feldolgozás lényegesen több pszichés tulajdonság megvalósítását segíti elő, mint az első, azaz több nevelési cél eléréséhez szerez alapot a tanuló.

3. *Kitekintés az egységet megelőző és követő célrendszerre*

Az ismeretek rendszere, egymásraépítettsége, az induló szint és a végeredmény az, amit szem előtt kell tartanunk.

4. *A tananyag elemzése a témakörök fontosságá szemszögéből*

(Szándékosan nem írtunk tantervi követelményeket, mert a központi követelmények fokozatosan elvesztik meghatározó szerepüket.) Minden tanulóval mindent megtanítani nem tudunk. A tanárnak okosan kell szelektálni, figyelembe véve, hogy mik a továbbhaladás követelményei, milyen a tanulók irányultsága, milyen a tanulók képessége stb.

5. *A tanulási tevékenység elemzése*

Meg kell néznünk, melyik tanulónak, milyen szinten szükséges, és melyiknek nem a tárgyi tevékenység, melyik tanuló (vagy tanulócsoport) igényel segítséget, melyik nem, kinek milyen a tanulási intenzitása és a tanulási sebessége stb.

6. *Módszerek, munkaformák, eszközök*

Az iskola felszereltsége, a tanulók szintje, a tanárok felkészültsége megszabja, hogy melyik osztályban lehet és milyen szinten csoportmunkát alkalmazni, hol van lehetőség és szükség individualizált foglalkoztatásra, hol képes a tanuló önálló munkára és hol tud, csak erős tanári segítséggel továbbhaladni.

7. *Szociális háttér*

Rendezett környezettel, jó szülői háttérrel rendelkező tanulókkal könnyebb jó eredményeket elérni, mint a hátrányos helyzetűekkel. A tanár tervező munkáját nagymértékben befolyásolja, hogy milyenek a tanulók otthoni körülményei. A gyengébb szociális háttér nagyobb törődést, alaposabb, körültekintőbb, jól átgondolt, célorientált tervező munkát kíván meg a tanártól.

Mivel a NAT által megfogalmazott követelményekből, mind az általunk leírtakból azt a következtetést szűrhetjük le, hogy nem azért tanítjuk a matematikát, hogy a tanuló minden definíciót, tételt pontosan kimondjon – bár ez is fontos – hanem azért, hogy a megszerzett ismereteit a társadalmi munkamegosztásban alkalmazni tudja. Csak az alkalmazásra képes matematikai ismeretek értékesek az egyén és a társadalom számára.

Végezetül nézzük meg, hogy milyen nevelési, oktatási, képzési célokat tudunk megvalósítani a matematikatanítás során.

1. *Kreatív személyiségtulajdonságok fejlesztése*

(Problémaérzékenység, rugalmasság, hajlékonyság, ötletgazdagság, könnyedség, eredetiség, kidolgozottság, újrafogalmazás, kiterjesztés, transzferálás.)

2. *Gondolkodási műveletek fejlesztése*

(Analízis, szintézis, absztrahálás, konkretizálás, általánosítás, specializálás, összehasonlítás, kiegészítés, rendezés, rendszerezés, analógia, összefüggések feltárása, lényegkiemelés, ítéletalkotás, fogalomalkotás, bizonyítás.)

3. *Ítéloképesség fejlesztése*

(Állítások logikai értékének meghatározása, a megoldás helyes vagy helytelen voltának megállapítása, adatok szükségessége, elégségessége, a felesleges adatok kiszűrése, eredmények életszerűsége.)

4. *Kombinatorikus gondolkodásmód kialakítása, fejlesztése*

(Minden adatot számba vettünk-e, az összes lehetséges és szükséges összefüggést megtaláltuk-e.)

5. *Bizonyítási igény fejlesztése*

(Válaszok indoklása, ok-okozati összefüggések helyes használata, helyes érvelés.

Ezáltal válik tudatossá a matematikai – és a társadalmi – tevékenység.)

6. *Algoritmikus gondolkodásmód kialakítása, fejlesztése*

(Optimális cselekvési tervek készítése, a tervek végrehajtása, egyszerűség, célszerűség, pontosság, hatékonyság.)

7. *Térszemlélet kialakítása, fejlesztése*

(Tájékozódás térben és időben, térbeli relációk felismerése, geometriai ismeretek gyakorlatban történő alkalmazása.)

8. *Értelmes, elemző olvasás fejlesztése*

(Adatok szükséges és felesleges volta, a köztük lévő kapcsolatok feltárása, a lényeg kiemelése.)

9. *Számolási készség kialakítása, fejlesztése*

(Számolás fejben, írásban, számolás a köznapi életben, becslés, kerekítés.)

10. *Függvényszerű gondolkodásmód kialakítása, fejlesztése*

(Adatok közti összefüggések, relációk felismerése, ezek tulajdonságainak meghatározása.)

11. *Következtetési sémák alkalmazása*

(Ok-okozat felismerése, következtetés egyről többre, többről egyre, többről többre.)

12. *Kombinatorikus gondolkodásmód kialakítása, fejlesztése*

(Az összes adat, feltétel számbavétele, a kapcsolatok összességének feltárása, sorrendezések, kiválasztások.)

13. *Kerekítésre, becslésre való képességkialakítása, fejlesztése*

(Eredmények kerekítése a gyakorlatban megkívánt pontosságra, becsült értékkel a tevékenység és az elérhető eredmény előzetes tervezése.)

Vegyük észre, hogy az általunk felsorolt célok összhangban vannak a NAT által meghatározott célokkal.

Kulcsszavak

célok, célrendszerek

nevelési célok

oktatási célok

képzési célok

az Ágoston-féle célrendszer

a NAT alapelvei, céljai

a fejlesztés fő területei

műveltségi területek

Kérdések, feladatok:

- 1) Mit értünk oktatási, nevelési, képzési célon?
- 2) Sorolja fel és elemezze a NAT műveltségterületeit!
- 3) Milyen oktatási, nevelési, képzési cél valósítható meg a matematikatanítás során?

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Nemzeti alaptanterv
Oktatási Minisztérium, 2004

Ajánlott irodalom:

- Pólya György: A problémamegoldás iskolája
Tankönyvkiadó, Budapest, 1968
- Kelemen László: Pedagógiai pszichológia
Tankönyvkiadó, Budapest, 1981
- Czeglédy István – Hajdu sándor: A nevelés tervezése a matematikaoktatásban
A matematika tanítása, folyóirat, Budapest, 1982/6

III. A matematikai ismeretszerzés pedagógiai – pszichológiai modellje

A jó matematikatanár fő ismérve az, hogy a matematikai ismereteket nem készen adja át a tanítványainak, nem csak közli – kinyilatkoztatásszerűen – az ismereteket, hanem arra törekszik, hogy a tanulók önállóan szerezzék meg, önállóan fedezzék fel azokat. Az ilyen tanítás magas fokú szakmai, pedagógiai, pszichológiai felkészültséget kíván meg a pedagógustól. Ismernie kell az ismeretszerzés során végbemenő pszichés folyamatokat, és

tudnia kell azt, hogy ezen pszichés folyamatok milyen pedagógiai modellekkel, hogyan segíthetők. Tudnia kell azt, hogy az egyes korcsoportokban mi jellemzi tanulóinak gondolkodását, valamint azt, hogy ezeket az ismereteket hogyan tudja mozgósítani a matematikai ismeretelsajátítás folyamatában.

Mivel a gondolkodás az alapja az ismeretszerzésnek – hiszen gondolkodás nélkül nincs megértés, megértés nélkül nincs problémamegoldás, azaz gondolkodás nélkül nincs tudatos matematikai tevékenység – kezdjük ezzel az elemzésünket.

A 6-10 éves korosztály gondolkodásának jellemzői

E korosztály általános jellemzője az erősen a szemlélethez, a tárgyi tevékenységhez kötött *képi dominanciájú gondolkodás*. Komolyabb matematikai absztrakció még nem várható el ezektől a tanulóktól.

Konkrét jellemzők:

- *megvannak a fogalomalkotás feltételei*; jól szembetűnő lényeges jegyeket a konkrét esetekben felfedeznek, kigyűjtene, megfogalmaznak,
- *az érzékek, a cselekvések, a tapasztalatok* révén szerzett ismereteket, elsajátított fogalmakat mélyebben ismerik, és tartósan megmarad emlékezetükben,
- kialakulnak *elemi fogalomrendszerek*, olyan alapismeretek, amelyekre később építeni lehet a fogalomalkotást, a magasabb szintű gondolati absztrakciót,
- képesek következtetésekre, de következtetéseik kezdetlegesek, csak konkrét, egyszerű fogalomrendszereknek felelnek meg (következtetés egyről többre, többről egyre).

Ezek ismeretében vizsgáljuk meg, hogy **mi várható el a 6-10 éves tanulóktól** a matematikai ismeretek elsajátítása terén!

- Egyszerű – egy-, esetleg kétműveletes – szöveges feladatok értő, elemző olvasása
- Egyszerű szöveges feladatokból a szükséges és a felesleges adatok kiválasztása
- Adatok közti egyszerű összefüggések felismerése
- Megoldások rekonstruktuálása
- Megoldások indoklása
- Tanár és társak gondolatmenetének követése, kiegészítése
- Munkaeszközök helyes használata
- Tárgyi tevékenységből következtetések levonása

Mégegyszer hangsúlyozzuk, hogy a tanulók gondolkodásának ezen jellemzői zömmel konkrét tárgyi cselekvéssel kapcsolatosan érvényesülnek.

A 11-14 éves korosztály gondolkodásának jellemzői

Ezek a tanulók már képesek egyszerű formális gondolkodási műveletekre, esetleg a tapasztalattól való elszakadásra, de a tárgyi tevékenység képzeleti még szükségesek az absztrakcióhoz.

- Képesek egyszerű fogalmakat konstruálni,
- képesek magasabbrendű (másod-, harmadrendű) fogalmakat, ismereteket alkotni,
- tárgyi tevékenység nélkül – de a tapasztalatok felidézésével – képesek következtetésekre,
- fel tudnak tárni bonyolultabb összefüggéseket,
- képesek felfogni a bizonyítások lényegét, a feltételek szükséges és elégséges voltát meg tudják határozni, képesek bizonyításokat rekonstruálni,
- képesek különböző – egymástól nem túl távol lévő – egyszerű fogalomrendszerek közti kapcsolatok feltárására.

Ezek ismeretében **a 11-14 éves korosztálytól elvárhatjuk**, hogy:

- tudjanak szöveget értelmezni esetleg összetett kapcsolatok esetén is,
- ismerjék fel az adatok közti összefüggéseket, tudják az adatokat egymással kifejezni,
- tudjanak megoldásokat rekonstruálni, és egyszerűbb feladatok esetén konstruálni,
- tudják a megoldásokat ellenőrizni,
- eszközök nélkül is legyenek képesek matematikai tevékenységre,
- tudjanak eredményeket kerekíteni, becsülni, és a becsült értékkel műveleteket végezni,
- legyenek képesek egyszerű bizonyítások rekonstruálására, követésére.

Tehát ennél a korosztálynál már megfigyelhető az eszköztől való elszakadás, a tárgyi tevékenység nélküli absztrakció, továbbá az ismeretek alkalmazására való képesség.

A 15-18 éves korosztály gondolkodásának jellemzői

Ez a korosztály már képes akár összetett, vagy többszörösen összetett formális gondolkodási műveletek végrehajtására is. Magasabb szinten jellemző rájuk a 11-14 éves korosztály ismérvszere.

Nevezetesen:

- Fogalomalkotás, ismeretszerzés konstrukcióval és absztrakcióval
- Magasabb rendű fogalmak, ismeretek alkotása
- Ok-okozati összefüggések felismerése, alkalmazása
- Fogalomrendszerek közti összefüggések, kapcsolatok feltárása
- Önálló bizonyítások elvégzése

Ezek alapján a **középiskolai korosztálytól elvárható**, hogy

- a gondolkodási műveletek felhasználásával bonyolult szövegeket is elemezzenek,
- megoldási terveket készítsenek, algoritmusokat konstruáljanak, megoldási terveket végrehajtsanak,
- megoldásukat egzaktan ellenőrizzék,
- a megoldások előtt tudatos becslést végezzenek, egy adott témakörnél szerzett ismereteiket más területeken is tudják alkalmazni, azaz legyenek képesek a transzferre,
- többszörösen összetett gondolkodási műveleteket alkotó, kombinatív módon felhasználva tudjanak problémákat megoldani.

Bár mi korosztályokról beszéltünk, amikor a tanulók gondolkodásának jellemzőit vizsgáltuk, de meg kell mondanunk, hogy ezek a szintek nem minden esetben kötődnek szorosan a korhoz. Gyakran találkozunk olyan esetekkel, hogy egy 10-11 éves tanuló gondolkodása fejlettebb egy 16-17 éves tanuló gondolkodásánál és viszont. (Elég csak a szakiskolák tanulóira gondolnunk, és ennek ellenpólusára, az elit általános iskolák 7-8. osztályos tanulóira.)

Hogy mégis ezt a felosztást vettük át a pszichológiai kutatóktól, annak az a magyarázata, hogy átlagosan, jó közelítésben ezek a jellemzők érvényesek az egyes korosztályokra, és ezek figyelembevétele sokat segít a tanítási-tanulási folyamat megszervezésében. Viszont felveti a

mindenkori mérés szükségességét, amelynek alapján megállapíthatjuk, hogy melyik tanuló, melyik korosztály gondolkodási szintjén van.

Ezen ismeretek azért is fontosak, mert (ahogy Skemp írja):

„Saját fogalomrendszert mindenkinek egyedül kell kiépíteni. De a folyamat felgyorsítható, ha a hozzá szükséges anyagok kéznél vannak.”

(Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája, Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005)

A „hozzá szükséges anyagok” itt a megfelelő munkaformák, módszerek, eszközök, tankönyvek, tanári tevékenységek, motiváció stb. széles tárházát jelentik.

Az eddigiek alátámasztják Skempnek az ismeretszerzésről alkotott elméletét.

„Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy a megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.”

„Míthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.”

(Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája, Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005)

Skemp és Piaget elméletét felhasználva dolgoztuk ki a matematikai ismeretszerzés fázisait. (Ezek részletesen olvashatók Dr. Czeglédy István: Kompetenciaalapú matematikaoktatás című főiskolai elektronikus jegyzetben. TÁMOP 4.1.2-08/1/a-2009-0038, Eger)

A matematikai ismeretek fázisai

1. Cselekvés, tapasztalatgyűjtés

Jellemzője a manipulatív tevékenység, a tudatos vagy esetleges tapasztalatszerzés, ezen tapasztalatok megfogalmazása.

2. Lényeges fogalmi jegyek kigyűjtése

A tanár irányításával, a tárgyi tevékenység kapcsán irányított megfigyeléseket folytat a tanuló, ezen tapasztalatok közül a jellemzőket megtartja, a lényegteleneket elveti. Sejtéseket fogalmaz meg. A sejtéseket a tapasztalatok alapján igazolja.

3. A zajok kiszűrése

A tanár példákkal és ellenpéldákkal, megfigyelési szempontok adásával tudatosítja a tanulóban, hogy az adott jegyek miért sajátjai az ismeretnek, vagy miért idegenek attól. Szerencsés, ha a tanuló – a tanár által adott ellenpéldákkal – saját maga jön rá a tévedésére, és saját maga korrigálja azt.

4. Egyszerű fogalmak kialakítása

Az első három fázisnak a szintézise. Már konkrét definíciót, értelmezést is elvárunk a tanulótól. (Pl.: természetes szám, tört, osztó stb.)

5. Egyszerű fogalmakhoz kapcsolódó ismeretek kialakítása

Kapcsolatot keresünk a többi egyszerű fogalommal, beillesztjük a fogalmak rendszerébe, műveleteket végzünk velük, algoritmusokat alakítunk ki, stb. (Pl.: műveletek, műveleti sorrendek, közös osztó stb.)

6. A fölérendelt fogalmak kialakítása

Megkonstruáljuk az egyszerű fogalmakból alkotható magasabbrendű fogalmakat, feltárjuk ezek rendszerét. (Pl.: racionális szám, egyszerűsítés, bővítés, legnagyobb közös osztó stb.)

7. A fölérendelt fogalmakhoz kapcsolódó ismeretek kialakítása

Ugyanazokat a műveleteket végezzük el, mint az 5. pontban csak magasabb szinten. (Pl.: prímtényező felbontás.)

8. Kapcsolatépítés a különböző fogalomrendszerek, ismeretrendszerek között

Megmutatjuk a matematika egyes témaköreinek fogalomrendszerét, majd a különböző fogalomrendszerek közti kapcsolatot tárjuk fel. (Pl.: egyenletek, kombinatorika, valószínűség.)

Elemelve az egyes fázisokat, továbbá az egyes korosztály tanulóinak gondolkodási jellemzőit megállapíthatjuk, hogy a manipulatív tevékenység (ami lehet tárgyakkal, eszközökkel végzett konkrét tárgyi tevékenység, és lehet matematikai példákkal, képzetekkel, tapasztalatokkal, eljárásokkal folytatott „tárgyi” tevékenység) döntő láncszem a matematikai ismeretszerzésben.

A manipulatív tevékenységtől a gondolati absztrakcióig

Kelemen László írja:

„A személyiségfejlődés és –fejlesztés cselekvések, tevékenységek folyamatában megy végbe. Ezért a nevelés módszerei is alapvetően a fejlődő ember cselekvéseinek, tevékenységeinek irányítására, befolyásolására törekcsenek.”

(Kelemen László: Pedagógiai pszichológia, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981)

Az oktatási-nevelési folyamatban a cselekvést, a tevékenységet meghatározónak, elsődlegesnek kell tekintenünk, mert az egész személyiséget mozgásba hozza, fejleszt. Az iskolában – ahol a tanulás lesz a tanulók fő tevékenységi formája – sem hagyható figyelmen kívül a játék, a cselekvés, a tárgyi tevékenység.

„Az általános iskolai matematikatanítás korszerűsítésének – a tartalmi változtatások mellett – legszembeűnőbb törekvése az, hogy a tanulók ne készen kapják a matematikai ismereteket, hanem kísérletekből, tárgyi tevékenységből kiindulva, mintegy felfedezzék azokat.”

(Czeglédy István – Hajdu Sándor: A tárgyi tevékenység szerepe a matematikai készségek, képességek fejlesztésében, Módszertani Közlemények, 1984/2. szám)

Dienes Zoltán – aki méltán tekinthető a matematikatanítás egyik legnagyobb reformerének, aki a játékok nyelvére igyekszik lefordítani a matematika jelentős részeit, akitől nagyon gyakran hallhatják, hallhatták a gyerekek: „Ez jó, de most próbáld meg szebben!” buzdítást – egy előadásban így szólt a matematikatanítás nehézségeiről:

„Ha valakinek nehéz a matematika, az azért lehet, mert a matematikai fogalmakat nem tudja valamilyen képzethez, tapasztalathoz, tárgyhoz kapcsolni. Ha például azt mondjuk, hogy valaki betört egy házba, összepakolta az értékeket és elvitte, ez, mint egy filmen, leperreg az ember előtt, el tudja képzelni, hogy történt az eset, de, ha azt

mondjuk, hogy $ax^2 + bx + c$, vagy legnagyobb közös osztó, akkor ez semmi képzetet nem alakít ki a gyermekben, ha előtte nincs meg a megfelelő tevékenység.”

Minden tanárnak érdemes elgondolkodni Dienes professzor ezen mondatain, s érdemes tanítási-tanulási munkáját úgy tervezni, hogy a tanulónak az ismeretei valami korábbi fogalomhoz, valami képzethez kapcsolódjanak, mert így könnyebb a felidézés, tartósabb, alkalmazhatóbb az ismeret.

A manipulatív tevékenységnek a matematikaoktatásban való térhódítása Piaget kutatási eredményeinek közzététele után indult meg. Piaget kutatásai egyértelműen igazolják:

„A gondolkodás tartalmát nem lehet statikus visszatükröződésnek tekintenünk, hanem olyan aktív, értelmi műveleti sémának kell felfognunk, amelyek a tárgyi tevékenység során alakulnak ki, fokozatosan belsővé válnak, a tevékenység többszöri megismétlődésével generalizálódnak, differenciálódnak, működésük optimalizálódik, kifinomul, újabb és újabb tartalmakra terjed ki.”

(Czeglédy István – Hajdu sándor: A nevelés tervezése a matematikaoktatásban
A matematika tanítása, folyóirat, Budapest, 1982/6)

A „külső” tevékenység „belsővé” válása folyamatában Piaget több szintet különböztet meg. A tanulók egy alacsonyabb szintről csak akkor képesek magasabb szintre emelkedni, ha a megfelelő gondolkodási struktúrák már kiépültek. Ezek a kiépülések bizonyos életkorhoz kötődnek.

Más vizsgálati eredmények viszont azt mutatják, mint ahogy azt korábban írtuk, hogy ezek az életkori szakaszok nem tekinthetők abszolútnak. Egy adott korosztályú tanulócsoportnál néhány tanuló nehezebb problémahelyzetben visszaeshet egy „alacsonyabb” gondolkodási szintre, mások pedig képesek magasabb szinten tevékenykedni. A matematikai tevékenységben különösen igaz ez: minden korosztálynál különböző gondolkodási szintek is megtalálhatók egymás mellett.

Gondolkodási szintek

– Kísérletező szakasz

A tanuló konkrét tárgyakkal tevékenykedik. Ennek során bizonyos élmények, tapasztalatok halmozódnak fel. Ez a fázis inkább véletlenszerű, mint irányított. Az ad hoc-szerű tapasztalatszerzés során megindul bizonyos elemi műveletek belsővé válása.

Például a törtek fogalmának kialakításánál a színesrúdkészlet elemeivel végez a tanuló olyan nem irányított kísérleteket, hogy milyen azonos színű rudakból és milyen színűekből tud kirakni egy adott rudat.

– *Az indukció megjelenésének szintje*

Ebben a fázisban is jellemző a konkrét tárgyi tevékenység, vagy a tárgyakhoz erősen kötődő tevékenység, – de a tevékenység itt már kapcsolódik a matematikai modellhez, és irányítottabb, mint az első fázisban.

A törtek fogalmának kialakításánál ez úgy jelentkezik, hogy a színesrudaknak megfelelő, azzal szinkronban lévő, egymás alatt elhelyezett számegyenesek beosztásait feleltetjük meg az adott rudak hosszának. A tárgyi modell mellett párhuzamosan megjelenik a matematikai modell, s esetleg a tanuló képes a konkrét tárgyakat általánosabb, de még materiális modellel helyettesíteni (számegyenes).

– *Az indukció teljessé válik, a dedukció megjelenik*

Az eszközöktől való elszakadás általános, de az eszközzel nyert tapasztalat felidézésére szükség van. Eszközzel való konkrét tevékenység is elképzelhető ezen a szinten, de csak úgy, hogy az értelmi tevékenység megelőzi, irányítja a tárgyi cselekvést. Így kevésbé érthető fogalmat ért meg a tanuló, vagy nehezebb problémát old meg tárgyi tevékenység segítségével.

A külső cselekvés belsővé válásának folyamatában ezen a szinten minőségi ugrás van, amit az értelmi tevékenység irányító funkciója jelez. A törteknél ez úgy jelentkezhet, hogy azonos nevezőjű törteket hasonlítunk össze, és nehézség esetén a tanuló felidézi, hogy melyik rudat milyen egyenlő rudakból raktuk ki, s azokból hány jelképezi az adott törtet. Ha ez a felidézés nem megy, akkor – az értelmi cselekvés irányításával tudatosan – azonos rudakkal rakja ki a kérdéses törteket és így dönti el a nagysági viszonyukat.

– *A dedukció szintje*

A tanulóknak az absztrakt fogalmakkal végzett műveletek során nincs szükségük a konkrét, tapasztalati élmények felelevenítésére. Az egyeditől az általános felé vezető utat képes megfordítani, azaz problémákat az általános felől megközelíteni, s ily módon új összefüggéseket, eljárásokat, algoritmusokat felfedezni. Erre jó példa a törtekkel való műveletek tanítása. Ezen a szinten a tanulóknak a színesrúd

felelevenítése nélkül képesnek kell lenniük a különböző nevezőjű törtek összeadására, kivonására stb.

A szintek után bemutatott példákban az is nyilvánvaló, hogy egy 10 éves tanulónál is megtalálhatók a gondolkodás különböző szintjei. Elképzelhető az is, hogy ha a tanulóknak nehézséget jelent az összeadás, kivonás a törtek körében (tehát nincs a tanuló a 4. szinten), akkor „visszamegy” a 3. vagy esetleg a 2. szintre, s mégegyszer „végigjátssza” eszközzel, vagy annak „képzetével” a műveleteket.

Középiskolában ezek a szintek úgy módosulnak, hogy több esetben a konkrét tárgyak szerepét átveszik a kidolgozott mintapéldák, majd ezután jön az induktív és deduktív ismeretszerzési út.

A gondolkodási szintekhez igazított szakdidaktikai modell

Itt azt vizsgáljuk, hogyan lehet megszervezni a tanár és a tanuló munkáját ahhoz, hogy a korábban elemzett pszichológiai elvek érvényesüljenek

– A megalapozás, az előkészítés szakasza

A tanulók ismerkednek az eszközökkel, kísérleteket hajtanak velük végre. Kezdetben követik a tanári demonstrációt, később a tanári útmutatást. Például a törteknél ez úgy jelentkezik, hogy a tanár a színesrúd demonstrációs modelljével mágneses táblán kirakja a törtek értelmezéséhez szükséges „alakzatokat”, ezeket a tanulók a helyükön „utánózzák”. Később a tanár csak közli, hogy mit kell a tanulóknak csinálniuk a színesrúdkészlettel. Ezután ugyanezt az értelmezést megcsinálják területmodellel, szakaszmodellel, korongokkal stb. Fontos, hogy több eszköz szerepeljen a tevékenység során, mert ekkor egy eszköz fizikai tulajdonsága (például: szín, forma) nem kötődik a fogalomhoz (zaj).

Ez a folyamat viszonylag hosszú. A matematikai tartalom általában globálisan, komplex módon jelentkezik. Minél többféle modellel, minél alaposabban végzi a kísérleteket a tanuló, annál valószínűbb, hogy a mechanikus tanulás helyett az értelmes tanulás kerül előtérbe.

– A tapasztalatok, a sejtések összegyűjtése, megfogalmazása

Ennek a fázisnak az elsődleges célja a tapasztalatok tudatosítása, a lényeges és lényegtelen jegyek szétválasztása. A feladatok kapcsán különböző eszközökkel azonos

matematikai tartalmat fedeztetünk fel. A sejtéseket megfogalmazzuk, finomítjuk, újabb tárgyi tevékenységekkel pontosítjuk.

Például: Rakd ki a zöld rudat azonos színű rudakkal (fehérrel, rózsaszínnel, késsel stb.)! Tapasztalatok: kisebb rudakból több kell, a nagyobbakból kevesebb; a fél nagyobb, mint a harmad, a negyed; egy fél egyenlő két negyeddal stb. A tapasztalatgyűjtés és a sejtések megfogalmazása a tanár által irányított.

– *A tapasztalatok általánosításának és logikai rendezésének szakasza*

A tanulók adottságai, képességei különbözők, így képzettségük, aktuális fejlettségük is különböző lesz, amikor ebbe a szakaszba érnek.

Olyan feladatokat kell terveznünk, hogy a tanulókat fokozatosan szakítsuk el az eszköz használatától, de akinek szükséges, az még használhassa azt. Ekkor már célszerű differenciálni. Itt mutatkozik meg leginkább az, hogy a tanulók a gondolkodásnak a különböző szintjein vannak. Célunk az, hogy a tanulók a matematikai eljárások felfedezése és belsővé válása alapján legyenek képesek megfogalmazni szabályokat, s nem fordítva, azaz a megtanult (bevéselt) szabályok alapján végezzék el a műveleteket. A definiálásra is hasonló igaz.

Nevezetesen: a fogalmak kialakulása után önállóan próbálják megfogalmazni a definíciókat, s nem a definíció megadása után tisztázni a fogalmi jegyeket.

A már kiépült ismeretrendszereket is bevonjuk az ismeretszerzés folyamatába, megmutatva a köztük lévő kapcsolatokat. Ebből adódóan a tanulók képesek lehetnek deduktív úton is magyarázatot találni bizonyos matematikai összefüggésekre, jelenségekre.

Például a törtek összeadásánál, kivonásánál a közös nevező és a legkisebb közös többszörös, vagy a törtek egyszerűsítése és a legnagyobb közös osztó kapcsolata.

– *Az ismeretszerzés kiépülésének és működőképessé válásának szintje*

Az előző fázis feladatainak megoldása során a tanuló egyre több területen jut el az általánosságig, új ismereteit mindinkább képes rendezni, azaz logikailag kapcsolni egymáshoz, illetve a korábban kialakult ismeretrendszerekhez. Ha a tanuló tevékenységét döntően ez jellemzi, akkor mondhatjuk, hogy eljutott a tanulási folyamat befejező szintjére.

Természetesen ez a „befejező szint” csak viszonylagos, hiszen ezután a kialakult ismeretekkel ugyanúgy tevékenykedve, mint korábban a tárgyakkal, jut el a tanuló a magasabb szintű ismeretekhez.

Ebben a szakaszban bővítjük az ismeretrendszert (külső, belső koncentráció), megszilárdítjuk a fogalmakat (gyakorlás, ismétlés, rendszerezés, alkalmazás), készségeket, képességeket alakítunk ki, fejlesztünk tovább (számolási készség, szövegértelmezés stb.).

A tanórán alkalmazott manipulatív tevékenység nagyon alapos szervező munkát igényel.

Néhány jó tanács:

- Az eszközöket sohasem használjuk öncélúan, hanem az ismeretszerzés érdekében!
- Csak addig használjuk az eszközt, amíg erre a tanulónak szüksége van!
- Válasszuk ki azokat az eszközöket (szelektáljunk), amelyekkel az adott ismeretelsajátítást legjobban tudjuk segíteni!
- Gondosan tervezzük meg az eszközhasználatot, hogy ne vezessen órai fegyelmezetlenséghez használatuk!
- Adjunk a tanulóknak megfigyelési szempontokat, hogy tevékenységük célirányos legyen, s ne véletlenszerű!
- A tapasztalatokat, a következtetéseket, a sejtéseket a tanulókkal mondassuk ki, minden esetben indokoltassunk is!

Így elérhetjük, hogy a manipulatív tevékenység valóban az ismeretszerzést szolgálja. A tanuló önállóan jut el az ismeretekhez, nem csak a szabályok bevésésére törekszik, hanem keresi a lényegét, és ismeretrendszere állandóan fejleszthető, előhívható, mozgósítható, alkalmazható, bővíthető lesz.

Kulcsszavak

a gondolkodás jellemzői a különböző korosztályokban

az ismeretszerzés fázisai

Piaget interiorizációs elmélete

gondolkodási szintek

szakdidaktikai modell

indukció

dedukció

Kérdések, feladatok:

1. Ismertesse az egyes korosztályok matematikai gondolkodásának jellemzőit!
2. Válasszon ki a középiskolai tananyagból (Hajdu-féle tankönyvesalád) egy témakört, és tervezze meg hozzá az ismeretszerzés fázisait!
3. Válasszon ki az általános iskolai tananyagból (Hajdu-féle tankönyvesalád) olyan feladatokat, példákat, amelyek az egyes gondolkodási szinteket és a hozzájuk igazított szakdidaktikai modellt reprezentálják!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010
3. Czeglédy István – Hajdu Sándor: A tárgyi tevékenység szerepe a matematikai készségek, képességek fejlesztésében
Módszertani közlemények, 1984/2.

Ajánlott irodalom:

- Kelemen László: Pedagógiai pszichológia
Tankönyvkiadó, Budapest, 1981
- Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát
Gondolat Kiadó, Budapest, 1973
- Dienes professzor játéka
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989
- Nagy József szerkesztésében: A megtanítás stratégiája. A pedagógia időszerű kérdései
Tankönyvkiadó, Budapest, 1984
- Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája
Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005

IV. Definiálás a matematikában, definiálási hibák

A definiálás művelete

Definíció (latin):

„Pontos meghatározás, amely valamely fogalom, vagy tárgy lényeges jegyeit tárja fel.”

(Bakos Ferenc: Idegen szavak és kifejezések szótára, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973)

A matematikai ismeretek alapjai a matematikai fogalmak. A fogalom leegyszerűsítve, gondolati absztrakció. A matematikai ismeretrendszerek kialakításához a fogalmak, fogalomrendszerek sokasága szükséges, mégpedig olyan sokasága, amely egyben mutatja az egymásraépítettséget és a fokozatosságot is.

A Piaget-féle interiorizációs elmélet a külső cselekvések belsővé válását elemzi. Azt kutatja, hogy a konkrét cselekvés során szerzett tapasztalat, érzet hogyan válik az elvont gondolkodás, az absztrakció eredményévé, nevezetesen fogalommá.

Az elvont gondolkodás legfontosabb összetevői az általánosítás és az elvonatkoztatás (absztrahálás).

(A gondolkodási műveletekről részletesebben a későbbi fejezetben szólnunk.)

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a fogalomalkotás olyan többszörösen összetett gondolkodási művelet, amely magában foglalja az analízis, a szintézis, az összehasonlítás, az összefüggések meglátása, az általánosítás, az absztrahálás és az ítéletalkotás gondolkodási műveleteket.

Definiáláskor bizonyos tárgyakat, objektumokat, fogalmakat – közös tulajdonságuk alapján – halmazokba sorolunk. A definíciónak az a szerepe, hogy segítségével egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy egy adott fogalom, tárgy beletartozik-e a halmazba, vagy sem.

Ezen ismeretek birtokában, látva, hogy a definiálás egy nagyon nehéz, többszörösen összetett gondolkodási művelet, érthetjük meg igazán Richard R. Skempnek a fogalomalkotás fázisainál írt hipotézisét.

„Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismertnél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy a megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.”

(Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája, Edge 2000 Kiadó, Budapest, 1975)

A matematikai fogalmak kialakulásához egyértelműen az induktív utat javasoljuk. Ennek az útnak a fő jellemzői: egyestől a többesig, speciálistól az általánosig, konkrétól az absztrakttig. A deduktív út akkor lehet eredményes, ha a tanuló képzettsége, illetve formális gondolkodási műveletei eléri, vagy meghaladják az ehhez szükséges szintet.

Varga Tamás egy előadásában találóan így fogalmazott:

„Azt a gyereket, aki speciális nélkül tud általánosítani, és konkrét nélkül tud absztrahálni,
ki kell találni.”

A matematikában valamely meghatározandó fogalmat általában úgy értelmezünk, hogy a fogalom tartalmi jegyeit más, már korábban megismert fogalmak segítségével tárjuk fel. Mivel véges számú fogalmat ismerünk, minden ilyen fogamolánc elkezdődik valahol. Azokat a fogalmakat, amelyeket nem tudunk, vagy nem kívánunk még egyszerűbb fogalmakra visszavezetni, azaz egyszerűbb fogalmakkal definiálni, *alapfogalmaknak* nevezzük. A rendszer többi fogalmát az alapfogalmak, vagy a már korábban definiált fogalmak segítségével értelmezzük.

A definíciók fajtái

A matematikai definícióknak különböző fajtái alakultak ki az idők során. Ezek a különböző fajtájú definíciók legtöbbször helyettesíthetők egymással.

1. *Klasszikus tárgymeghatározás*

Megadjuk a legközelebbi „nemfogalmat” (genus proximum), és a faji különbséget (differentia specifica).

Például: A trapéz olyan *négyszög*, amelynek van *párhuzamos oldalpárja*.

Nemfogalom (alaphalmaz): *négyszög*, faji különbség (részalmaz kiválasztása): van *párhuzamos oldalpárja*.

2. *Keletkezést, származást leíró, genetikus meghatározás*

A dolgok keletkezésének, létrejöttének leírásával adjuk meg a fogalmat.

Például: A háromszög csúcsából a *szemközti oldalra bocsátott merőleges* a háromszög magasságvonala.

3. *Megnevező (nominális) meghatározás*

Valójában a fogalom tartalmi jegyeit tárjuk fel a megnevezéssel.

Például: Azokat a természetes számokat *nevezzük* prímszámoknak, amelyeknek pontosan két természetes szám osztója van.

4. *Hozzárendelő meghatározás*

Ismert fogalomhoz rendeljük hozzá a definiálandó fogalmat.

Például: 1 dm^3 (térfogat) \approx 1 liter (ürtartalom), vagy 1 dm élű kocka térfogata 1 dm^3

5. *A halmaz elemei közös tulajdonságával való meghatározás*

Itt is az alaphalmaz egy részhalmazára jellemző tulajdonságát emeljük ki.

Például: Azok a valós számok a racionális számok, amelyek *felírhatók két egész szám hányadosaként*. (A nevező nem 0.)

6. *A halmaz elemeinek, vagy összes részhalmazának megadásával való meghatározás*

A közös tulajdonságot az elemek, illetve a részhalmazok tulajdonságaival adjuk meg.

Például: A 0; 1; 2; 3; 4; ... számok a természetes számok. A racionális és az irracionális számok együtt a valós számok.

7. *Rekurzív meghatározás*

Ha ismerünk egy, vagy néhány „kezdő” elemet, továbbá tudjuk, hogy bármelyik elemből hogyan következtethetünk a rákövetkezőre, akkor ezt a halmazt ismertnek tekintjük. (Definiáltuk.)

Például egy Fibonacci típusú sorozat:

$$a_1 = 2; \quad a_n = a_{n-1} + 3 \quad \text{ha} \quad n > 1 \text{ és } n \in \mathbb{N}.$$

Ha egy fogalomra többféle definíciót használunk, akkor mutassuk meg ezek ekvivalenciáját.

Például:

A téglalap olyan paralelogramma, amelynek szögei egyenlőek.

(Klasszikus meghatározás.)

Az egyenlőszögű paralelogrammát téglalaprak nevezzük.

(Nominális meghatározás.)

Azok a paralelogrammák, amelyeknek átlói egyenlő hosszúak a téglalapok.
(A halmaz részhalmazainak megadása.)

Utalva a fejezet elején mondottakra:

Az általános iskola alsó tagozatán a konkrét tapasztalatra építve, a tulajdonságokat felfedeztetve határozzuk meg a fogalmakat (kezdetleges, ösztönös definiálás).

Az általános iskola felső tagozatán az induktív utat követve már bevezethetjük a klasszikus tárgymeghatározást, a megnevező, a hozzárendelő és a felsoroló definíciókat (elemi, alapfogalmakra épülő definiálás).

Középiskola felsőbb évfolyamán már mindegyik típusú definíciót használhatjuk, sőt a köztük lévő ekvivalenciát is megmutathatjuk (utalás a fogalomrendszer axiomatikus felépítésére).

Tipikus definiálási hibák

A helytelen fogalomalkotás leggyakoribb módja a hibás definíció adása. Ezek között van olyan, amelyik tartalmilag hibás, és van olyan amelyik metodikailag. Mindkettőt el kell kerülni.

1. *Olyan fogalommal határozunk meg egy másik fogalmat, amit még nem definiáltunk*

Például: Sík és egyenes hajlásszögén értjük az egyenesnek és a síkra való merőleges vetületének a szögét. (Nem tanítottuk még, hogy mi a merőleges vetület.)

2. *Homályos meghatározás*

Nem tudjuk eldönteni egy fogalomról. Hogy beletartozik-e halmazba, vagy sem.

Például: A pont olyan dolog, amelynek nincs kiterjedése.

3. *Tagadó meghatározás*

A fogalmat a tagadásával próbáljuk megadni, holott még a fogalmat sem ismerik a tanulók. Például: A konvex alakzat az , ami nem konkáv.

4. *Körbenforgó meghatározás*

Valamely fogalmat közbülső fogalom meghatározásával, önmagával próbáljuk definiálni. Például: Egy szakaszt, ha mindkét végén tetszőlegesen meghosszabbítunk, akkor egyenest kapunk. A szakasz az egyenes két ponttal határolt része. (Ráadásul az

első definíció azért sem jó, mert az egyenest alapfogalomként kezeljük, nem definiáljuk.)

5. *Taulógia*

Önmagával történő meghatározás. Például: A kör az, ami kör alakú.

6. *Tág meghatározás*

A fogalom valamely lényeges jegyét elhagyjuk. Például: A téglalap olyan négyszög, amelynek átlói egyenlők.

7. *Szűk meghatározás*

Több ismérv felsorolásával a definiálandó halmaz részhalmazát adjuk meg.

Például: A rombusz olyan négyszög, amelynek oldalai egyenlők, és a hosszabbik átlója merőlegesen felezi a rövidebb átlót. (Így a négyzetet kihagytuk a halmazból.)

8. *Bőbeszédű meghatározás*

Több tulajdonságot adunk meg a szükségesnél; olyanokat is, ami a többi segítségével bizonyítható. Például: A téglalap olyan négyszög, amelynek a szögei egyenlők és 90° -osak, átlói egyenlők és felezik egymást, szemköztes oldalai párhuzamosak, a szomszédosak merőlegesek. (Itt elegendő vagy csak a szögek egyenlősége, vagy csak a merőlegesség, a többi tulajdonság ezekkel igazolható.)

Kulcsszavak

definíció

definíció fajtái

definiálás, mint gondolkodási művelet

definíciók ekvivalenciája

definiálási hibák – szakmailag

definiálási hibák – formailag

Kérdések, feladatok:

1. Sorolja fel a definíciók fajtáit, és értelmezze azokat!

2. Keressen a Hajdu-féle általános- és a középiskolai könyvekben definíció fajtákat minden témakörből, majd adja meg ezeknek ekvivalens megfogalmazásait!
3. Sorolja fel a definiálási hibákat, és mondjon mindegyikre a mintapéldáktól különböző példákat!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Vörös György: A matematikatanítás sajátos tantárgypedagógiai problémái.
A matematika tanítása, jegyzet
Tankönyvkiadó, Budapest, 1979

Ajánlott irodalom:

- Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája
Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005
- Dr. Vörös György: Szemelvénygyűjtemény
Tankönyvkiadó, Budapest, 1976

V. A gondolkodásfejlesztés és a gondolkodás lehetséges hibái

Az a tanuló válik jó problémamegoldóvá, annak lesz fejlett a gondolkodása, aki szilárd, biztos ismeretanyaggal rendelkezik, akinek a megszerzett ismeretei aktívak, pontosak, mobilizálhatók, folyamatosan bővíthetők, nyitottak, bármikor előhívhatók, transzferálhatók és a gyakorlatban alkalmazhatók.

Tehát a matematikai ismeretszerzésnél nem elég a pedagógusnak az ismeretszerzés mennyiségi oldalát szem előtt tartania. Fontos ugyan, hogy a kívánt mennyiségű és minőségű ismeretekkel rendelkezzen a tanuló, de, hogy ezen ismeretrendszerrel a logikus gondolkodást is optimálisan fejleszteni tudjuk, azaz fentebb mondott ismeretrendszert alakítsunk ki, lényegesen több kell. Ezt a többletet, vagyis a tudatos matematikai ismeretelsajátítás folyamatát elemeztük az előző két fejezetben, és erre utalunk sok esetben A kompetenciaalapú matematikaoktatás című elektronikus jegyzetben is.

Vizsgáljuk meg, hogy melyek azok az okok, amelyek a tanár gondolkodásfejlesztő munkájának fogyatékoságait előidéznek.

A tanár gondolkodásfejlesztő munkájának lehetséges hibái

1. Készen nyújtott fogalmak, ismeretek

Valamilyen ok miatt az ismeretszerzés pszichológiailag megalapozott fázisait nem követi a tanár, nem tartja be a Pólya-féle tanítási-tanulási alapelveket. A tanulókat passzív befogadásra kényszeríti. Nincs aktív tanulás, nincs heurisztika, nincs fokozatosság, egymásraépítettség, és nincs motiváció. Van viszont sok-sok közlés, megfelelő példa nélküli definíció, értelem nélküli verbális tanulás (magolás), kényszer, unalom, közöny. Ez a fajta tanári munka teljesen ellentmond a tanulással kapcsolatos kutatási eredményeknek.

Éppen a természetes tanulás előnyeit veszítjük el akkor, ha tanításunkat ez a módszer jellemzi. A természetes tanulás a környezettel való aktív kapcsolatra épít, a cselekvésre, a tapasztalatgyűjtésre, a sejtésre, az alkalmazásra – tehát a tanuló aktív tevékenységére. Éppen azért mondjuk azt, hogy a *természetes tanulás* kevésbé energiaigényes, könnyed és hatékony, míg a verbalizmusra épülő *mesterséges tanulás* nagy energiaigényű, fárasztó, unalmas és ezáltal kevésbé hatékony. Egy további hátránya a készen nyújtott fogalomalkotásnak, hogy az így szerzett ismeretek nem lesznek tartósak. Azért nem, mert a tanuló nem saját maga alakította ki ismeretrendszerét, nem ő építette be az új ismereteket a saját ismereteinek meglévő rendszerébe, hanem kívülről „erőszakolták” ezt rá.

Az eddig mondottakat igazolja a következő megtörtént eset. A szerző éppen az itt mondottak vizsgálatára végezte el a következő kísérletet.

Egy középiskola harmadik évfolyamán két tanulócsoportnak feladta ugyanazt a feladatot. A feladat elég nehéz volt, bár nem lépte túl a jobb tanulóktól elvárható szintet, egyik csoportban sem tudta megoldani senki.

Ekkor a tanár az egyik csoportban *közölte* a megoldást, annak minden lépését indokolva, s állandóan ügyelve arra, hogy a tanulók értsék is, amit ő mond. A megoldás végén minden tanuló közölte, hogy érti a megoldást, és most már önállóan is meg tudnak oldani hasonló feladatot.

A másik csoportban úgynevezett „felvezető”, előkészítő feladatsorral próbálkozott a tanár. A felvezető, előkészítő feladatokat a tanulók a tanár útmutatásával, kérdéseire adott válaszokkal viszonylag önállóan oldották meg. (A

felvezető feladatok tartalmazták azokat az ismereteket, amelyek az eredeti feladat megoldásához nélkülözhetetlenek voltak, és amelyeket a mintapéldák alapján felfedeztek a tanulók. A megoldás végén ezek a tanulók is úgy nyilatkoztak, hogy értik a megoldás menetét, és hasonló feladatokat önállóan is meg tudnak oldani.

A két módszer közti különbség szembeszökő. Az egyik tanulócsoport *megkapta* a megoldás módját, *elfogadta* azt, és valamilyen szinten asszimilálta meglévő ismereteinek rendszerébe. A másik tanulócsoport a felvezető példák alapján felfedezte a megoldáshoz szükséges ismereteket, azokat alkalmazta a többi rásegítő feladat megoldásánál. Így jutott el – viszonylag önállóan, tanári irányítással – az eredeti feladat megoldásáig.

A kísérlet folytatásaként három hónap múlva ugyanezt a feladatot megkapta mindkét csoport úgy, hogy a három hónap alatt az adott feladathoz hasonlót, vagy ahhoz vezetőt, illetve abból levezethetőt nem oldottak meg.

Az eredmény: az egyik csoportból senki nem tudta megoldani a feladatot, sőt nem is emlékeztek arra, hogy valaha találkoztak ezzel a feladattal, míg a másik csoport 25 %-a adott hibátlan megoldást a feladatra, és további 50 %-ának volt valamilyen sejtése a megoldás menetéről.

Sok hasonló példával lehet igazolni, hogy ha a tanulók nem készen kapják az ismereteket, nem kárhozzatjuk őket passzív befogadásra, hanem érvényesítjük a tanítási-tanulási folyamat pedagógiai és pszichológiai alapelveit (amit a korábbi fejezetekben fejtettünk ki), akkor olyan ismeretrendszert tudunk kialakítani tanulóinkban, amely érvényes, értékes, hasznosítható tudást jelent.

2. *Nem teremt erős ismeretbázist*

Ez a tanári hiba is pedagógiaileg-pszichológiaileg megalapozott ismeretszerzési folyamat be nem tartásából következik. Bekövetkezésében külső tényezők is szerepet játszanak. Például az utóbbi időben bevezetett – tananyagcsökkentésnek álcázott – óraszámcsökkentés.(Ezt azzal a hamis érveléssel indokolták, hogy a tanulók túl vannak terhelve.) Gondoljunk arra, hogy, ha egy tantárgy heti óraszámát 5-ről 4-re, vagy 4-ről 3-ra csökkentik, – mint az a matematikánál megtörtént – akkor ez 20-25 %-os óraszámcsökkentést jelent, miközben az elsajátítandó tananyag mennyisége alig, vagy egyáltalán nem csökkent.

Vizsgáljuk meg, hogy mit jelent az, hogy nem teremt erős ismeretbázist a tanár. Jelentheti azt, hogy a tanuló ismerete nem tartós, nem alkalmazható, nem alakulnak ki jártasságok, készségek ott, ahol ez szükséges lenne, és ebből következően a kialakítandó nevelési-képzési célok területén is maradnak hiányosságok.

Az okok között legtöbbször az elszigetelt, elnagyolt fogalomalkotás, a felszínes ismeretszerzés, továbbá a bevésés, a gyakorlás elmaradása, vagy nem kellő mennyiségű és minőségű végrehajtása, és a külső, belső koncentráció, illetve a folyamatos ismétlés hiánya szerepel.

A tanár, szorítva a tantervi követelményektől, vagy csak egyszerűen a számára kedvezőbb, kényelmesebb, kevesebb fáradtsággal járó utat követve eltekint a tanulási folyamat fontos lépéseitől. Leginkább a két nagyon fontos lépcsőfok marad ki: a cselekvés, tapasztalatgyűjtés, illetve a begyakorlás. Mindkettő nagyon időigényes tevékenység. A folyamatos ismétlés, a külső, belső koncentráció megtervezése pedig az órára való felkészülésre szánt időt növeli, vagy mérsékeli.

Ahhoz, hogy ezt a hibát ne kövesse el a tanár, az szükséges, hogy alapos tárgyi tudással, továbbá pedagógiai, pszichológiai, módszertani kultúráltsággal rendelkezzen. Tudjon a tananyagok között szelektálni. Inkább kevesebb ismeretet közvetítsen a tanulóinak, de azt alaposan, minden oldalról megvilágítva tanítsa meg.

Rövid távon esetleg eredményesnek tűnhet a gyors, felületes tárgyalásmód, de hosszú távon csak a szakmailag, pedagógiaileg, pszichológiailag, módszertanilag megalapozott tudás lehet eredményes.

3. *Kifogásolható kérdésfeltevés*

Mind az ismeretszerzésben, mind a gyakorlatban, problémamegoldásban nélkülözhetetlen a pedagógus, bármilyen informatikai, vagy más eszközt használunk is a tanítás során. Minden munkaformánál döntő módszer a tanár-diák dialógus. Ebből következően a tanári kérdéseknek mind a megértés, mind a problémamegoldás esetén döntő szerepe van. A tanár kérdések segítségével tudja felszínre hozni a tanuló passzív ismereteit. Ezáltal tudja a tanuló a szükséges adatokat kiválasztani, a feleslegeseket elvetni, az összefüggéseket felismerni, a kapcsolatokat zárt formában, és pontosan kifejezni, a lényegét kiemelni stb. A jó tanári kérdések, utasítások azok, amelyekkel az eredményes ismeretelsajátítás megvalósítható

Milyen a jó kérdés?

A kérdés akkor jó, ha érthető, nem félreérthető, ha gondolkodtató, ha egyértelmű, ha tömör és a lényegyet emeli ki. Ha egy kérdést több kérdéssel meg kell magyaráznunk, akkor az nem jó kérdés.

Nem tartjuk szerencsésnek a következő kérdéstípusokat:

- eldöntendő (Legfeljebb akkor, ha indoklást, illetve példát, vagy ellenpéldát is kérünk hozzá. Enélkül 50 %-os eséllyel jól válaszol a tanuló.)

Például: Metszi, vagy nem metszi egymást a két egyenes?

Konvex, vagy konkáv az alakzat?

- megszemélyesítő (Nem a lényegre vonatkozik a kérdés.)

Például: Mit csinálnak egymással az átlók?

- sugalmazó (Már a kérdésben utalunk a válaszra.)

Például: Ugye hogy derékszöget zár be a két oldal?

- Félrevezető (A rossz válasz sugallja a kérdés.)

Például: A pozitív egész számokat nevezzük természetes számoknak?

Ezen kívül „szükséges rossz”-nak tartjuk azokat a kérdéseket, amelyek csak ismeretek reprodukálását, felidézését kívánják meg a tanulóktól, és nem gondolkodtatnak. Ez főleg a gyenge képességű tanulóknál szükséges.

Például: Hogyan adunk össze két egyenlő nevezőjű törtet?

Milyen számok a végtelen szakaszos tizedes törtek?

4. *Pontatlan terminológiahasználat*

A matematikatanárnak – aki fogalmat alkot, algoritmusokat, eljárási módokat határoz meg, tételt fogalmaz meg és bizonyít – pontosan kell beszélnie, és ezt a pontosságot meg kell követelnie tanítványaitól is. Nem keverheti az „és”-t a „vagy”-gyal, az „akkor”-t az „akkor és csakis akkor”-ral stb.

A megfogalmazások pontatlanságából adódó hiba például: $x < 2$ és $x > 5$, illetve $x < 2$ vagy $x > 5$. Míg az első esetben üres halmaz a megoldás, a második esetben végtelen sok egész szám kielégíti az egyenlőtlenségrendszer.

Más példa:

A 15-nek van két pozitív osztója.

A 15-nek két pozitív osztója van.

Az első állítás igaz, a második hamis. Hiszen 4 pozitív osztója van a 15-nek (tehát van két pozitív osztója), de nem csak két pozitív osztója van.

Ha a tanár pontatlanul beszél, akkor ezt a tanítványai automatikusan követik.

5. *A rutinfeladatok túlzott használata*

Mint korábban mondtuk, az egyszerű, begyakoroltató feladatoknak fontos szerepe van az ismeretszerzésben. Ezekkel tudunk jártasságokat, készségeket kialakítani, és ezekkel valósítható meg a tartós bevésés is.

Viszont egy idő után, amikor tanítványaink már jártasság, vagy készség szintjén rendelkeznek az adott ismerettel, váltanunk kell. Ha ezt nem tesszük meg, akkor lélekölő, unalmas, gyötrő munkára kényszerítjük őket, ami azt eredményezi, hogy elfordulnak a matematikától. Óriási a tanár felelőssége abban, hogy felismerje kinek mennyi gyakorlás szükséges, kinek kell még gyakorló feladat és kinek nem.

Ez a differenciálás problematikáját vetíti elénk, hiszen egy adott csoportban is vannak jó képességű, és kevésbé jó képességű tanulók, akik más-más szinten állnak az ismeretelsajátítás folyamatában. A jobb képességű tanulókkal ilyenkor az adott témakörből bonyolultabb feladatokat, problémákat oldassunk meg, míg a gyengébb képességűek továbbra is egyszerű feladatokat oldhatnak meg, amíg el nem érik legalább a minimális szintet.

6. *Időzavar*

Már a 2. pontban is szóltunk az óraszám-csökkentésről. Ez is eredményezhet időzavart, de egyéb okok is előfordulhatnak. Tudomásul kell vennünk, hogy mindenkinek mindent, – ami a tankönyvben benne van, vagy amit a tanterv előír – nem lehet megtanítani. Ez függ a tanulók értelmi fejlettségétől, a tantárgy heti óraszámától, az iskola által támasztott követelményektől, és nem utolsó sorban a tanár felkészültségétől.

Egy pedagógus örömmel újságolta a tankönyv egyik szerzőjének, hogy ő minden, a tankönyvben és a gyakorlóban megtalálható feladatot megoldatott a tanulókkal. A tankönyv írója nyilvánvalóan nem örült ennek, mert így csorbát szenved az ismeretelsajátítási folyamat valamelyik fázisa. Hiba gyorsan „végighajtani” a tanulókat az adott tananyagon. A gyors, ebből adódóan felszínes feldolgozás több kárt okoz, mint hasznot hajt. A tanár felelőssége a helyes szelektálás. Tudnia kell, hogy melyek azok, amelyek a későbbiek során, a magasabb évfolyamokon újból elővehetők. Ezt figyelembe véve mentesül abból a szorításból, hogy mindent meg kell tanítania, és ennek következményétől, ami az egyes tananyagok felszínes ismerete, begyakorolatlan mivolta.

Az is eredményezhet időzavart, hogy a tanár az indokoltnál több időt fordít a szóbeli számonkérésre (például a táblánál feleletet 10-15 percig egy tanulót), és új ismeretre ebből adódóan kevés idő jut. Ez pedig azt eredményezheti, hogy tanári előadás formájában gyorsan közli a tananyagot, amivel elköveti az 1. pontban elemzett hibát.

E hibának kiküszöbölési módjai:

- a tananyag megfelelő szelektálása,
- az óra momentumainak arányos meghatározása,
- adott témakörben inkább kevesebb feladat megoldása, de annak alapos megbeszélése,
- az egyes tanulókkal a többi rovására történő foglalkozás elkerülése,
- egyszerűség, célszerűség a tanításban.

7. *Nem differenciál*

Köztudott, hogy még kisebb, viszonylag azonos képességű, képzettségű tanulócsoporthoz is nagy különbségek vannak tanuló és tanuló között.

Példaként elég azt felhozni, hogy a szerző évek óta szervezi a Kalmár László Országos Matematikaverseny döntőjét 3. és 4. osztály számára, amelyen minden megye első két helyezettje vesz részt. Tehát a megyék legjobbjai. Gondolnánk, hogy nincs sok különbség a teljesítményükben. Nos, ez nem így van. Ezen matematikailag jó képességű gyerekek között is volt olyan tanuló, aki mindössze 20 pontot, és volt olyan tanuló, aki 120 pontot (maximumot) ért el. Ha a „válogatott” tanulóknál ez a helyzet, akkor nagy valószínűséggel minden osztályban megtalálható hasonló képzettségbeli különbség. Amennyiben ezt nem veszi figyelembe a tanár, akkor esetleg sok tanulót kizár a matematikai ismeretszerzés örömeiből.

Ha a jobb képességű tanulóknak „magyaráz”, akkor egy-két tanuló kivételével mindenki értetlenül ül az órán. Ha az „átlagosnak” magyaráz, akkor a jók és a gyengék nem vesznek részt aktívan a munkában, hiszen a jóknak ez túl alacsony, a gyengéknek pedig túl magas szint. Ha a gyengéket helyezük középpontba, akkor pedig legalább az osztály kétharmada „unatkozik”.

Tehát egységes munkaformával, módszerrel nem lehet egy heterogén osztályban (és a legtöbb iskola legtöbb osztálya heterogén) sikeres oktatást megvalósítani. Mind az ismeretelsajátításban, mind a gyakorlásban szükséges a differenciálás.

8. Szaktárgyi és magatartásbeli fogyatékoságok

Egy jó matematikatanárnak mind szakmailag, mind pedagógiaiilag, pszichológiaiilag, módszertanilag mindig a maximumot kell nyújtani. Ha bármelyik csorbát szenved, akkor annak az oktatás látja kárát.

Egy tanár legyen mindig következetes. Következetes a tanulókkal való bánásmódban, a számonkérésben. A tanárnak nem lehetnek „kifogott” emberei, és nem lehetnek kedvenc tanítványai. Az egyenlő bánásmód elve mindenkire vonatkozik, legyen az elmarasztalás, vagy dicséret.

A tanárt nem befolyásolhatja a hangulata. Főleg úgy nem, hogy abból a tanulóinak kára származzon.

Az olvasó figyelmébe ajánljuk Pólya György: A tanárok tízparancsolata című intelmeit. Ha azt megfogadjuk, akkor elkerüljük a szakmai, és a magatartásbeli fogyatékoságokból eredő hibákat.

A tanulók gondolkodásának lehetséges hibái

A korábbiakban elemeztük az ismeretelsajátítás folyamatát. Ennek egyik legfontosabb eleme, hogy a tanuló az új fogalmat, ismeretet úgy jegyzi meg, úgy tanulja meg, hogy beépíti azt a meglévő fogalmak rendszerébe – asszimiláció, vagy akkomodáció révén. Ez a beépítés mindenkinél más és más. Nagymértékben függ attól, hogy milyen az egyén meglévő ismeretrendszere, mennyire alaposak és mélyek, mennyire szilárdak ezek a rendszerek, továbbá attól is függ, hogy milyen a tanulók gondolkodása, mennyire fejlettek a gondolkodási műveletei. Minél több formális gondolkodási műveletre képes a tanuló, annál inkább képes pontos ismeretszerzésre. Valójában a egyén meglévő ismeretrendszerének minősége, továbbá a gondolkodási műveletekben való jártasságok, készségek különbözősége határozza meg azt, hogy melyik tanuló milyen szinten áll az osztály előmeneteli rangsorában.

A gondolkodási műveletek hiányos volta, valamint a hiányos ismeretrendszer sokszor eredményez olyan hibákat, amiket a tanuló akkor is elkövet, ha a tanár nagyon körültekintően tervezi meg az ismeretelsajátítást.

Mosonyi Kálmán *Gondolkodási hibák* című munkájában gyűjtötte össze a tanulók által leggyakrabban elkövetett hibákat. A hibaforrásokat külön-külön taglaljuk, de előljáróban leszögezzük, hogy egy hibát általában több ok idéz elő. Mosonyi Kálmán könyvében két csoportra bontja az okokat:

- *domináns* okoknak nevezi azokat a hibaforrásokat, amelyek előidézik az adott hibát, illetve
- *kísérő* okoknak azokat, amelyek zavaró momentumként erősítik az adott hiba előfordulását.

Attól függően, hogy mik a domináns és mik a kísérő okok, kell eldöntenünk, hogy a *hibák kialakulását megelőzni, vagy a hibát kijavítani* könnyebb-e.

Triviális hibának tekintjük a hiányos ismereteket. Ha a tanuló nem rendelkezik azokkal a fogalmakkal, tételekkel, szabályokkal, összefüggésekkel ismeretével, amelyek a probléma megértésének, megoldásának előfeltételei, eleve kudarcra van ítélve minden próbálkozása.

1. *Helytelenül feltételezett analógia, mint hibaforrás*

Az analógia nagyon fontos gondolkodási művelet. A matematikai feladatok megoldásában – főleg a bonyolultabbak esetén – szinte nélkülözhetetlen.

Pólya György írja:

„Próbálj visszaemlékezni valamilyen hasonló, ismert feladatra! Nem tudnád-e úgy átfogalmazni a feladatot, hogy egy korábbihoz hasonlítson?”

A problémák megoldásánál minden ember törekszik a számára újabb ismeretlent valamilyen korábban tanult hasonló ismeretre visszavezetni, természetesen olyanra, aminek a megoldását is tudja. A fogalmak kialakításánál is ez a helyzet. A korábbi fogalomalkotást próbálja megismételni más esetekben. Éppen ez okozza legtöbbször a hibát.

Akkor beszélünk analógiás hibáról, ha a tanuló *olyan helyen feltételez analógiát, ahol a valóságban ez nincs meg.*

Néhány példa:

$$\text{ha } 7 > 5 \text{ akkor } \frac{1}{7} > \frac{1}{5};$$

$$\text{ha } 7 > 5 \text{ akkor } -7 > -5;$$

$$\text{ha } 12 > 8 \text{ akkor } 0,12 > 0,8.$$

Mivel $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, így ebből $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ helytelen következtetést vonja le a tanuló.

Hasonlóan, mivel $a \cdot (b + c) = ab + ac$, így ebből $a \cdot (b \cdot c) = ab \cdot ac$ helytelen eredményre következtet a tanuló.

Ezekben a hibákban domináns okként jelentkezhethet az analógia, de a fogalmak hiányos volta, illetve a formalizmus (kísérő okként) még fokozza ezt a hatást. Az új fogalmak, ismeretek bevezetésénél mindig meg kell mutatni a különbségeket. Így, ha megelőzni nem is tudjuk ezeket a hibákat, kialakulásukat csökkenthetjük annyira, hogy később – sok alkalmas példával, és ellenpéldával – könnyebben javíthatók legyenek.

2. Formalizmuson alapuló hiba

A képletek, a formák, a sémák nagyon fontos szerepet játszanak a matematikatanulásban. Gyorsabbá, egyszerűbbé, könnyebbé teszik munkánkat. A probléma akkor keletkezik, ha a tanulóknál „*tartalom nélküli forma*” alakul ki, ha *verbálisan, értelem nélkül tanul meg képleteket, algoritmusokat*.

Ezt a hibát eredményezhetik az absztrahálás-konkretizálás, az összefüggések felfogása, az analízis-szintézis gondolkodási műveletek terén mutatkozó hiányosságok.

Például ilyen hiba, ha a Pitagorasz-tételt $a^2 + b^2 = c^2$ formában adja meg a tanuló anélkül, hogy tudná, az a , b , c milyen oldalakat jelentenek.

A százalékszámítási képletek, sémák használatánál is többször találkozunk olyan esettel, hogy a tanulók a képleteket a szokványos, alapfeladatoknál könnyedén alkalmazzák, de amint kicsit változtatunk a szövegezésen, vagy az adatokon, már bizonytalanok a kiszámítási módban. Ezt a hibát az előzőhöz hasonlóan szintén erősíti a fogalmak tisztázatlan volta.

A képletek automatikus alkalmazása szinte tálcán kínálja ezt a hibát.

A $K = 2 \cdot r \cdot \pi$, illetve a $T = r^2 \pi$ képletek gyakori „cseréje” tipikus formalizmuson alapuló hiba, amit még az ismeretek hiányos volta erősít is. A képletek legyenek az ismeretszerzésnek záró fogalmai, amit csak akkor alkalmazzunk mechanikusan, ha minden változóval és minden összefüggéssel teljesen tisztában van a tanuló.

Ezeknek a hibáknak a kialakulását könnyebb megelőzni, mint a kialakult hibákat javítani.

A felfedezettő tanítást kell előtérbe helyeznünk, s lehetőleg minél kevesebbet közölni, minél kevesebbet „öszönözni” tanítványainkat a passzív befogadásra.

Pólya György *A tanárok tízparancsolatában* azt írja erről:

„Ne tömjed az anyagot tanítványaidba, hanem ösztönözzed őket értelmes tanulásra!”

(Pólya György: *A problémamegoldás iskolája*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968)

3. *A megszokáson alapuló hiba*

A megszokás nagy erő. Sokáig befolyásolja az ember gondolkodását. A rossz beidegződéstől nagyon nehezen tud megszabadulni az ember. Ezen hibák többségét akkor is elkövetheti a tanuló, ha a tanár nagyon gondos volt a tanítás során.

Például: alsó tagozatban – mivel itt még csak a természetes számokkal végeznek műveleteket – a tanulóknban rögződik – anélkül, hogy a tanár mondta volna –, hogy két szám összege mindig nagyobb, mint bármelyik tag. Később, amikor bevezetik a negatív számokat, csak nagyon nehezen tudja elfogadni azt, hogy az összeg lehet kisebb is, mint valamelyik összeadandó. Hasonlóan igaz a törtekkel való szorzásra, osztásra is.

Más példa: Ha a tanár nem eléggé körültekintő, és csak olyan tizedestörtek szorzását végzik el, amelyeknél a szorzat is tizedestört, akkor nehezen fogadja el a tanuló, hogy két tizedestört szorzata egész szám is lehet.

Hasonlók igazak a törtekre és az osztás műveletére is. Például: $7,5 \cdot 14,4 = 108$ helyett gyakran 10,8 eredményt „kap” szorzatként, hiszen eddig tizedestörtek szorzata mindig tizedestört volt.

Az új fogalmak gondos kialakítása, specifikumainak kiemelése nagymértékben csökkenti ezt a hibát. Javítása pedig sok-sok ellenpélda megmutatásával történhet. Ezeknél a hibáknál az absztrahálás, a specializálás-általánosítás, az összefüggések felfogása, az analógia, az ítéletalkotás hiányosságai játszhatnak döntő szerepet.

4. *A fogalmak tisztázatlan voltából adódó hibák*

Ezek a leggyakrabban előforduló hibák a matematikatanulásban. Okai, hogy a fogalomalkotásoknál nem minden lényeges jegyet gyűjt ki a tanuló, illetve olyan jegyeket is a fogalom jegyei közé sorol, amelyek nem jellemzőek az adott fogalomra.

Néhány ilyen példa:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

Erősíti a hiba előfordulását a helytelen analógia és a formalizmus is, mivel

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

azaz számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szorozzuk.

Algebrai kifejezéseknél jelentkező hiba:

$$x + x^2 = 2x^3 \quad (\text{vagy } 2x^2, \text{ vagy } 2x \text{ stb.})$$

A feladatnál az egynemű – különemű kifejezések, az együttható, változó, továbbá a hatvány fogalma nem tisztázott.

Más példa:

$$x - \frac{2x + 3}{2} = x - x + \frac{3}{2},$$

azaz a törtvonal „zárójelfunkciója” nem ismert a tanulók előtt. E hibát főleg az absztrakcióra való képesség, az analízis-szintézis, az összefüggések felfogása, az analógia hiányos volta idézi elő.

Javítása a fogalmak lényeges jegyeinek tudatos kiemelése, a lényegtelen jegyek elvetése, a megfelelő példák és ellenpéldák adása révén lehetséges.

5. *Hiányos előismeretek miatti hibák*

Egy fogalom, ismeret, algoritmus kialakításához addig nem kezdünk hozzá, míg meg nem győződünk arról, hogy a tanulók rendelkeznek a szükséges előismeretekkel. Ezeket rövid diagnosztikus tesztekkel tudjuk felmérni.

Feladat: először pótolni kell a hiányzó ismereteket, és utána erre építve bővíteni a fogalom jegyeit.

Ez minden anyagrész tanításánál jelentkezhet. Ennél a hibánál a *feledés* is komoly szerepet játszik, s ebből eredően bármilyen gondolkodási műveletben mutatkozó hiányosság növeli e hiba előfordulásának gyakoriságát.

6. *Szakkifejezések, szakszavak helytelen használata*

Ez annyiban befolyásolja a matematikai tevékenységet, hogy az adott szó, kifejezés mögött nincs meg, – vagy tévesen van meg – a matematikai tartalom. Ebből eredően az adott fogalmakkal végzett gondolkodási műveletek is hibásak lesznek.

Például: kisebb \neq nem nagyobb; és \neq vagy; legalább – legfeljebb – pontosan;

ha ... akkor ... \neq pontosan akkor, ha ...; vagy \neq vagy ... vagy;
egyenes arányosság: egyik növekedése maga után vonja a másik növekedését, stb.
Úgy lehet rajta segíteni, hogy a tanár törekszik mind matematikailag, mind stilisztikailag a helyes beszédre, és ezt megköveteli a tanulóktól is.

Az ismeretszerzés és a problémamegoldás tudatos tervezésével, a tanulás pedagógiai-pszichológiai alapelveinek maximális figyelembevételével, magasszintű szakmai felkészültséggel elérhetjük, hogy tanulóink csak elenyésző mértékben kövessék el ezeket a hibákat.

Kulcsszavak

gondolkodás
gondolkodást fejlesztő hibák
készen nyújtott fogalmak
erős ismeretbázis
a jó kérdések jellemzői
terminológiák
rutinfeladatok
differentiálás
analógia, mint hibaforrás
formalizmus
megszokás
fogalmak tisztázatlan volta
hiányos előismeretek
szakmai nyelv

Kérdések, feladatok:

1. Sorolja fel a tanár gondolkodásfejlesztő munkájának lehetséges hibáit!
2. Válasszon ki a Hajdu-féle középiskolai tankönyvcsaládból néhány feladatot, és konstruáljon kérdéseket a megoldás elősegítésére!
3. Milyen tanulói gondolkodási hibákat ismer? Adja meg a kiküszöbölési lehetőségeket!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I. főiskolai jegyzet

Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000

2. Mosonyi Kálmán: Gondolkodási hibák

Tankönyvkiadó, Budapest, 1972

Ajánlott irodalom:

Kelemen László: Pedagógiai pszichológia

Tankönyvkiadó, Budapest, 1981

Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978

VI. Motiváció a matematikaoktatásban

Valószínű sok tanár feltette magának a kérdést: Hogyan tudom tanítványaimat meggyőzni arról, hogy kell nekik matematikát tanulniuk, és hogyan tudom rávenni őket az aktív tanulásra, akár a tanórai, akár az otthoni munka során? Hogyan érhetem el azt, hogy a tanuló örömmel, kényszer nélkül tanulja a matematikát? A Pólya-féle tanítási-tanulási alapelvek egyike a legjobb motiváltság elve. Ha ezt az elvet meg tudjuk valósítani, akkor már választ kaptunk a miért tanuljuk, és hogyan tanuljuk kérdésekre.

Szintén Pólya György mondja, hogy

„A matematikatanárnak jó kereskedőnek kell lenni, el kell tudni adni a portékáját (az ismeretanyagot) a vevőnek (a tanulónak).”

(Pólya György: A problémamegoldás iskolája, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968)

Sokan nem hiszik sem a fiatalabb, sem az idősebb korosztályból, hogy a matematika is lehet érdekes, színes, hasznos, szórakoztató, és mindez úgy, – mint ahogy Descartes találóan mondta – hogy közben tisztán, világosan lássuk, érzékeljük a valóságot, az igazságot.

Vizsgáljuk meg, hogy mit is jelent valójában a motiváció, és hogyan tudjuk úgy megszervezni munkánkat, hogy érvényesüljön mind a tanulónál, mind a tanároknál a legjobb motiváltság elve.

A motiváció értelmezése, jellemzése, területei

Motiváció (latin eredetű): a cselekvés ösztönzői, kiváltói.

(Idegen szavak és kifejezések szótára, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973)

A pszichológiai megközelítés is ezt mutatja. Nevezetesen: a motívumok olyan cselekvésre készítő tényezők, amelyek magát a motívumot – a szükségérzetet – végső soron kiiktatják, megszüntetik. Ilyen motívumok lehetnek a megismerési folyamatban kialakuló érzékletek, képzetek, emlékezések, gondolatok, felismerések, élmények, megoldási tervek stb.

A megismerésre, az ismeretszerzésre, a problémamegoldásra irányuló belső készítés legegyszerűbb formája a *kíváncsiság*. Az emberek megfigyelnek, megvizsgálják dolgokat, folyamatokat, esetleg olyan tapasztalatokat szereznek, amelyeket pillanatnyilag nem tudnak hasznosítani, nem tulajdonítanak neki jelentőséget, de később ez a kíváncsiság nemes formákat is ölthet például tudatosság formájában.

A motiváció jellemzőinek feltárásával az a célunk, hogy olyan tevékenységi formákat állítsunk elő, amely kialakítja a tanulóknál azt a motivációt, amellyel belső készítés hatására vesz részt a matematikai ismeretszerzésben.

Kozéki Béla munkái alapján elmondhatjuk, hogy a motiváció aktív tevékenységre készítő belső feszültség, amely a cselekvés és a tapasztalatok alapján fejlődő, formálódó, folyamatosan aktivizálódó szükségérzet. A külső hatások belsővé válásának energetikai alapja. A motívum a különböző viselkedésformák beindítására és fenntartására irányuló energia, amelyet valamilyen külső, vagy belső hatás aktivizál.

A motiválás pszichológiai területei

1. *Affektív (érzelmi) terület:*

Két szélsőséges pólusa van ennek a területnek. Az egyik a *pozitív érzelmi viszony* a tanárokhoz, a társakhoz, a szülőkhöz. Jellemzője az elvárásoknak a *megfelelni akarás*. Az általános iskolában, annak is főleg az alsóbb évfolyamaiban az affektív terület meghatározó. A 6-10 éves korosztálynál döntő a tanító néni szeretete, megbecsülése. A gyerekek nem biztos, hogy a matematika érdekességéért szeretik a tantárgyat – bár ez sem kizárt – sokkal inkább az a törekvés jellemzi őket, hogy megfeleljenek az elvárásoknak, dicséretet kapjanak, elégedettek legyenek a teljesítményükkel.

(Szóbeli, írásbeli dicséret, piros pont, jeles osztályzat, vagy csak egyszerűen egy bátorító, ösztönző mosoly.)

Ez még felső tagozatban is tapasztalható, de már lényegesen kisebb hangsúllyal.

A másik pólus a *negatív érzelmi viszony* ugyanezen személyhez. Erre inkább a *rideg elutasítás*, a *szembefordulás*, a *dac*, a „*csak azért sem*” viselkedés a jellemző. Többnyire személyes konfliktusokból, vagy a kompetens személyek által támasztott túlzott – legalább is a tanuló által túlzottnak tartott – elvárásokból eredeztethető. Több tapasztalat igazolja, hogy egy-egy tanár-, osztály- vagy iskolaváltás csökkentheti a negatív érzelmi viszony erősségét, és növelheti a pozitívét.

Középiskolában csak a „nagyon jó”, vagy csak a „nagyon rossz” tanárnak van domináns szerepe az érzelmi viszonyok kialakulásában.

2. *Kognitív* (értelmi, gondolkodási) terület:

Erre a területre jellemző lehet a megismerésre, a tanulásra való hajlam, törekvés, az ismeretszerzésben való aktív közreműködés. Itt játszik döntő szerepet a *kíváncsiság*, mint ennek a területnek a legfőbb motívuma.

A másik pólusra jellemző az ismeretszerzésben jelentkező *passzivitás*, az ismeretek legfeljebb esetleges elfogadása, az *érdektelenség*, az unalom. Mindezek oly nagy mértékben rontják az ismeretszerzés hatékonyságát, hogy a tanulási-tanítási folyamat teljesen eredménytelen is lehet.

Eredményes lehet az, ha a tanár megtalálja a diák érdeklődési körét, és az ismeretszerzésben, a fogalomalkotáshoz, a problémamegoldáshoz ezekből a témakörökből választja a megfelelő példákat.

A középiskolában többnyire ez a terület a meghatározó a megfelelő motiváció kialakításához.

3. *Effektív* (morális) terület:

A pozitív pólus ennél a területnél az, amikor a tanuló látja munkája eredményének társadalmi hasznát, vállalja a felelősséget a munkájáért, (pro és kontra) és nagy akaraterőt mozgósít ahhoz, hogy tanulása sikeres legyen. A negatív pólus, – amit a pedagógusnak gyorsan korrigálni, javítani kell – az a tanuló gyenge önkontrollja, a megalkuvása, az eredménytelenség elfogadása (és magyarázása), a kihívások kerülése.

Mint a területek elemzéséből kitűnik, azért nehéz a tanulók jelentős többségénél a megfelelő motivációs bázist kialakítani, mert az emberi pszichikum szinte valamennyi területéről szükségesek hozzá adalékok. A motiváció egy nagyon sok komponensű rendszer.

Nézzünk néhányat ezen komponensek közül!

Az egyik ilyen komponens a *tanuláshoz szükséges előfeltételek* biztosítása. Ez magában foglalja a tanulók kedvező kedélyállapotának létrehozását, a tanulási célok tisztázását, az érdeklődésfelkeltő problémaszituációkat, a tanulói kíváncsiság felkeltését.

A másik meghatározó komponens az *optimális feltételek* biztosítása. Ez a megfelelő munkaformákat, módszereket, illetve ezeknek az egyes tanulókra, tanulócsoporthoz történő illesztését jelenti. A tanulók eltérő módon viszonyulnak a különböző munkaformákhoz, módszerekhez, eszközökhöz. Van olyan tanuló, aki képtelen az önálló tanulásra, másokat a frontális, vagy közös munka nem tud lekötni, ismét mások a csoportmunkát nem tudják elfogadni, és sort még hosszan lehetne folytatni. Minden esetre a tanulóknak ez a sokfélesége ismét a differenciálás szükségességét vetíti elénk. Az egyéni bánásmód növelheti a tanulók motiváltságát.

A harmadik hangsúlyos komponens a tanulók *tanulási tevékenysége*. A motiválatlanságnak nagyon sokszor az az oka, hogy nem tudnak a tanulók tanulni. A tanulási tevékenység sokszor kimerül abban, hogy ülnek a tankönyv felett, látszattanulást folytatnak (hogy a szülőket, pedagógusokat megnyugtassák), de érdemi munkát nem végeznek, esetleg értelem nélküli verbális „magolást” folytatnak (mintegy megnyugtattva lelkiismeretüket). Önmagában egyik gyerek sem lesz képes az önálló tanulásra. Meg kell tanítani őket a lényeg kiemelésére, az összefüggések feltárására, a rögzítések fortélyára, a reprodukálásra, és ezen keresztül a konstrukcióra. Ha ezeket a tulajdonságokat sikerül a pedagógusoknak kialakítani tanítványaikban, akkor nem érzi munkáját eredménytelennek, hiábavalónak, fárasztónak és feleslegesnek. Jelentkezik a sikerélmény, ami további eredményes munkára sarkallja a tanulót.

A negyedik komponens a tanulók *optimális leterhelése*. Ne állítsuk tanítványainkat megoldhatatlan feladat elé. Mivel akár egy szűk osztályközösségben is óriási különbségek vannak tanuló és tanuló között, így a velük szemben támasztott követelmények sem lehetnek azonosak. Az azonos követelmények elvárása mind a jó képességű, képzettségű, mind a tetemes hátrányokkal bíró tanuló számára visszatartó erő. Például az átlagos követelmények a jóknál unalmat, érdektelenséget váltanak ki, míg a gyengébbeknél értetlenséget, teljesíthetlenséget, és ebből adódóan érdektelenséget, zárkózottságot eredményezhetnek.

Ez a komponens ismét a differenciálás szükségszerűségét mutatja.

A tanórai motiváció fő területei

1. A tananyag tartalmából adódó motiválási lehetőségek

- az életkornak, az érdeklődési körnek megfelelő példa- és feladatanyag,
- egymásraépülő, fokozatosan nehezedő tananyagtartalmak,
- a kis lépések elve a tanulásban,
- a tananyag gyermekközeli feldolgozása – sok kísérlet, cselekvés, tapasztalat, sejtés, természetes tanulás,
- a matematika hasznának bemutatása, gyakorlati alkalmazás,
- matematikatörténeti érdekességek, anekdoták,
- megoldatlan problémák bemutatása,
- szokatlan, meglepő adatokat tartalmazó feladatok, többféle megoldás keresése
- logikai fejtörők, keresztrejtvények.

Minden témakörhöz található olyan érdekes, a gyermek gondolkodásához közel álló, bevezető jellegű feladat, amellyel indítva az adott ismeret tanítását, az felkelti a tanulók érdeklődését.

Egy ilyen példa a számelmélet-oszthatóság témaköréből:

Vedd a magasságod centiméterekben mért hosszát, add hozzá tömeged kilogrammban mért értékét, majd ehhez add hozzá a születési idődnél az évszámát, végül ebből vond ki a házszámotokat!

Ha megvan, akkor az eredményt szorozd meg 9-cel!

Vedd a szorzat számjegyeinek az összegét! Ha ez az összeg többjegyű, akkor ennek a többjegyű számnak is add össze a számjegyeit stb. Ezt egészen addig folytasd, amíg egyjegyű számot nem kapsz! Ez az egyjegyű szám a 9.

Magyarázd meg a trükköt!

A 9-cel való oszthatóságra vonatkozó tétel és bizonyítás közlése helyett, egy ilyen érdekes indítással fel tudjuk kelteni a tanuló kíváncsiságát. Érdeklődéssel vesz részt az órákon a továbbiakban is.

Az is felkeltheti a tanulók kíváncsiságát, ha megmutatjuk, hogy Pitagorasz hogy „szerkesztette” meg a derékszöget zsinórcsomózással:

Egy hosszú zsinórra csomókat kötött egymástól azonos távolságban úgy, hogy 12 egyenlő hosszúságú szakaszt kapott a zsinóron. Majd a zsinórt háromszög alakban kifeszítette. Az egyik oldal 3 hossz, a másik oldal 4 hossz, a harmadik oldal 5 hossz volt. Ekkor a 3 és a 4 hossznyi oldalak által bezárt szög derékszög lett.

Ez szintén egy érdeklődést felkeltő példa lehet Pitagorasz tételének tanításához.

Egy szokatlan, és a tanulók számára szinte hihetetlen feladvány a következő:

Igaz-e, hogy $0,9999999\dots = 1$? (Válasz: igaz)

Kevés olyan tanuló van, még a magasabb évfolyamokon is, aki ezt első látásra el tudja fogadni. Az ilyen „mellbevágó” feladatokkal jól kezelhető a racionális szám fogalma.

Arra biztatjuk az olvasót, hogy keressen a matematikai irodalomnak széles tárházából hasonló motiváló feladatokat, és ezekkel próbálja ráhangolni tanítványait az órai munkára.

2. Az alkalmazott munkaformák, módszerek, eszközök motivációs lehetőségei

- egy órán belül – lehetőség szerint – a munkaformák, módszerek változtatása (frontális munka, csoport munka, kooperatív tanulási technikák, egyéni munka, önálló munka),
- a manipulatív tevékenység órai alkalmazása (eszközökkel végzett kísérletek – felfedezés – természetes tanulás),
- versenyhelyzetek kialakítása tanulók, vagy csoportok között,
- a matematikai tartalom „eljátszása” (mozgásos feladatok, keverékes feladatok, kombinatorikai kísérletek, geometriai transzformációk stb.),
- esztétikus, színes, figyelemfelkeltő szemléltető eszközök,
- differenciálás mind a tananyag tartalmában, a munkaformában, módszerben, eszközben, mind az értékelésben,
- könyvismertetés, búvárkodás, kiselőadások,
- folyamatok, folyamatábrák megjelenítése, elemzése.

Mint korábban írtuk, minden tanuló más-más beállítódású. Van, aki képes az önálló órai munkára, és igényli is azt, mások pedig szívesebben dolgoznak kisebb csoportokban, egymást segítve, kiegészítve, míg megint mások a frontális munkát helyezik előtérbe, szívesen veszik, sőt igénylik a tanári segítséget és mindez osztálykeretekben. A tanárnak úgy kell megterveznie az órai munkát, hogy a megfelelő szervezési módok, és módszerek egyénre szabottan fejthessék ki motiváló hatásukat.

Az eszközök használatánál arra kell figyelnie a tanárnak, hogy mindig csak akkor, olyan és annyi eszközt szerepeltessen az órán, amikor, amilyen és amennyi éppen optimális. Ha a tanuló a matematikai ismeretszerzés folyamatában már túl van egy szinten, akkor az eszközök alkalmazása, erőltetése inkább hátráltató, mint segítő, de semmiképpen nem motiváló. Az eszközök használata is erősen tanulófüggő. Nem biztos, hogy szerencsés az osztály minden tanulójaival elvégeztetni az adott kísérletet.

A versenyhelyzetekre szép példa a következő:

Két tanuló felváltva rak korongokat egy téglalap alakú asztalra átfedés mentesen. Az veszít, akinek a végén leesik a korongja az asztalról. (Már nem tud úgy korongot felrakni az asztalra, hogy az a felénél több területen feküdjön fel.)

Milyen stratégiát kövessünk, hogy nyerjünk? Igazságos-e a játék? Igaz-e, hogy megfelelő stratégiával mindig a kezdő nyer?

(Megoldás: a kezdő játékos a téglalap közepére – az átlók felezési pontjaira – helyezi a korongot, és utána mindig oda, hogy a másik játékos által lerakott koronggal pontosan átellenes helyen legyen az ő korongja, azaz középpontosan szimmetrikusan helyezkedjenek el a két játékos által kirakott újabb korongok. Mindig a kezdő játékos nyer. A játék nem igazságos.)

Egy kisebb fajta rajztáblával, és megfelelő nagyságú korongokkal lejátszathatjuk a játékot a tanulókkal viszonylag rövid idő alatt. Eredmény: a középpontos tükrözés tulajdonságait játszva tanulhatják meg a tanulók.

3. *Az értékelés, mint motiváló tényező*

Mint korábban mondtuk a legjobb motívum a kíváncsiság. Ha sikerül a kíváncsiságunkat kielégíteni, akkor sikerélményhez jutunk. A sikerélmény minden

ember számára a legnagyobb motiváló tényező. A tanár értékelő munkája eredményezi a tanuló siker- és kudarcélményét.

Hogyan érhetjük el, hogy tanulóink sikerélményt éljenek át?

- Az értékelésünk legyen mindig pozitív érzelmi töltésű! (A hiányosságokra is fel kell hívni a tanulók figyelmét az értékelés során, de ez nem lehet cinikus, rosszindulatú, bántó.)
- A jó képességű, képzettségű tanulóknál domináns legyen a dicséret, ami még jobb eredményre sarkallja őket.
- A gyengébb képességű, képzettségű tanulóknál a korholás, szidás helyett a biztatásra, a bátorításra helyezzük a fő hangsúlyt.
- Legyünk következetesek az értékelésben, és a tanuló minden teljesítményét értékeljük! (Jót, rosszat egyaránt.)
- A jó osztályzatok, a jutalmak mindig értékes tanulói teljesítményt tükrözzenek!
- A dicséretet lehetőleg mindig az osztály előtt, és hangosan mondjuk, míg az elmarasztalást lehetőleg négy szemközt, halkán.
- Az értékelés mindig személyre szóló legyen, és ne általános! (Van olyan tanuló, akinek az átlagos követelmény teljesítése a „csúcs”, és van olyan aki még a „jelesen túli” teljesítményre is képes.)

4. *A tanár személyiségtulajdonságai, mint motiváló tényezők*

A jó tanár jellemzői:

- nagy tárgyi tudás, széleskörű tájékozottság, felkészültség,
- pedagógiai, pszichológiai, módszertani kulturáltság,
- pedagógiai tapintat,
- türelem, megértés,
- következetesség, egyenlő bánásmód,
- jókedv, derű, humor,
- rendszeresség, összeszedettség, érthetőség,
- empátia: beleélő, beleérző képesség, a tanuló szemével látni, fejével gondolkodni, átélni ugyanazokat az érzéseket, érzelmeket, amit ő élt át, fogékonyság gondjaira, örömeire.

Sokan próbálták megkérdőjelezni a tanári munkának a tanítási-tanulási folyamatban betöltött jelentős szerepét, sokan akarták a pedagógus személyét helyettesíteni programozott oktatással, iskolarádióval, iskolatelevízióval, számítógépekkel, filmekkel, interaktív-táblával stb., de ezek a kísérletek mind kudarcot vallottak. Ezek az eszközök legfeljebb segítik, de nem helyettesítik a tanárt. A személyes példamutatás, a korábban felsorolt tulajdonságok mind követendő emberi értéként jelennek meg a tanulóban, ami óriási motiváló erő. Elég, ha csak arra gondolunk, hogy sok tanuló azért választja a pedagógus szakmát, azért tanul a matematika vonalán tovább (matematikatanár, műszaki egyetem, közgazdasági egyetem, matematikus stb.), mert „jó” matematikatanára volt.

Kulcsszavak

motivum

motiváció

kiváncsiság

sikerélmény

affektív

kognitív

effektív

a motiváció komponensei

a tanórai motiváció lehetőségei

Kérdések, feladatok:

1. Sorolja fel a motiváció pszichológiai jellemzőit!
2. Milyen komponensei vannak a motívumoknak?
3. Milyen motivációs lehetőségei vannak az iskolai matematikaoktatásnak?
4. A Hajdu-féle tankönyvcsaládból (1-12. osztály) gyűjtsön olyan feladatokat minden témakörből, amelyekkel fel tudja kelteni a tanulók érdeklődését a témakör iránt!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I – II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó, Nyíregyháza, 2000
2. Kozéki Béla: A motiválás és motiváció összefüggéseinek pedagógiai-pszichológiai vizsgálata

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980

3. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára

Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Ajánlott irodalom:

Richard R. Skemp: A matematikatanulás pszichológiája

Edge 2000 Kiadó, Budapest, 2005

Réthy Endréné: A tanítási-tanulási folyamat motivációs lehetőségeinek elemzése

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1988

VII. A gondolkodás fejlesztésének pedagógiai, pszichológiai vonatkozásai

A gondolkodás a legmagasabb szintű megismerési folyamat, közvetett megismerési forma, amely az elsajátított, illetve elsajátítandó ismeretrendszerre épülve összefüggések megértését, problémahelyzetek megoldását teszi lehetővé a gondolkodási műveletek felhasználásával.

Túlzás nélkül állíthatjuk, hogy a gondolkodás fejlesztése valamennyi tantárgy közül a matematikában valósítható meg leginkább – éppen a tantárgy sajátosságánál fogva.

(Lásd: Kompetenciaalapú matematikaoktatás, TÁMOP 4.1.2.-08/1/A-2009-0038, Eger)

Ezért tartjuk fontosnak, hogy a matematikatanárok a pszichológia, a pedagógia, a logika ide kapcsolódó fogalmait, ismereteit, hipotéziseit, tételeit, legújabb megállapításait megismerje, és alkalmazza a tanítási-tanulási folyamat megtervezésében, és eredményes végrehajtásában. Mint a matematikai ismeretszerzés elemzésében már taglaltuk, a gondolkodás a valóság megismerésének csak az emberre jellemző tevékenységi formája. Ennek útja a következő:

- *Az érzéki megismerésben a közvetlen tapasztalás valósul meg.*
- *Az emlékezet ezeket a tapasztalatokat tárolja, felhalmozza.*
- *A képzelet működése a tapasztalatokat új struktúrába szervezi.*
- *A gondolkodás pedig felhasználva, integrálva a megismerés valamennyi formáját, fogalmi síkon teszi lehetővé a tapasztalatok értelmi feldolgozását.*

A gondolkodás kiegészíti, pontosítja, értelmezhetővé teszi a közvetlen észlelésből származó tényeket. A gondolkodásnak a cselekvés az eredete, és a gyakorlati tevékenység függvényében fejlődik, formálódik. Ez teszi értelmezhetővé az érzéki megismerés számára hozzáférhetetlen oksági összefüggéseket.

A gondolkodás alapelemei a gondolkodási műveletek, amelyek a fejlődés kezdeti szakaszán tényleges (konkrét) cselekvésként jelentkeznek, és a tárgyakkal végrehajtott valóságos cselekvések alkotják azt a forrást, amelyből erednek. A fejlődés során a külső cselekvés belsővé válik.

(Lásd e jegyzet II. fejezetét. Piaget interiorizációs elmélete.)

Így válik igazán érthetővé a Skemp által megfogalmazott matematikai ismeretszerzési hipotézisek, a matematikai ismeretszerzési fázisok, továbbá Pólya György matematikatanulási alapelvei.

(Részletesebben: Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I. főiskolai jegyzet, Bessenyei Kiadó, Nyíregyháza, 2000)

Ismert, hogy a matematikai ismeretszerzés leglényegesebb pszichikus folyamatai a megértés, a tanulás és a problémamegoldás. Ezekhez nélkülözhetetlen, hogy bizonyos ismeretrendszerrel, fogalmi struktúrával rendelkezzen a tanuló, amihez kapcsolni tudja a befogadandó ismereteket. (Asszimiláció, akkomodáció)

A *megértés* a dolgok lényegének, alapvető összefüggéseinek feltárása, aminek eredménye a fogalomalkotás, a fogalmi rendszerek kiépülése. A fogalmakkal, ismeretekkel lehet gondolkodási műveleteket végezni, ezért nagyon fontos, hogy a kialakított matematikai ismeretek pontosak legyenek.

A *tanulás* során a matematikai fogalmaknak, ismereteknek, ismeretrendszereknek alapvető összefüggései, építményeinek, struktúrájának lényegi vonásai asszimilálódnak, akkomodálódnak – tehát beépülnek – a tanuló fogalmi rendszerébe. Annál eredményesebb a tanulás, minél inkább szerves része lesz a megszerzett ismeret a tanuló meglévő ismeretrendszerének.

Egy matematikai ismeretrendszer kialakulása nagyon sokféleképpen történhet. Pedagógiai, pszichológiai kutatások igazolják, hogy azok az ismeretek lesznek tartósak, aktívak, alkalmazásra képesek, rendszeresek, amelyekben érvényesül a képi dominanciájú gondolkodásból a fogalmi gondolkodásba való átmenet, azaz, amelynek a cselekvés a

felfedeztetés az alapja. Többek között ezért is káros a tanulókat passzív befogadásra kárhóztatni, illetve az értelem nélküli verbális ismeretszerzésre ösztönözni.

Problémának nevezünk minden olyan kérdést, feladatot, amelyre a választ, a megoldást nem tudjuk azonnal észlelés, emlékezés, reprodukálás útján, tapasztalás alapján közvetlenül megadni, csak közvetett úton, azaz gondolkodási és logikai műveletek végzésén keresztül.

A *problémamegoldó gondolkodás* az a gondolkodási tevékenység, amely a problémák érzékelését, felfogását, megfogalmazását, újrafogalmazását, elemzését, megoldását, az eredmény ellenőrzését, általánosítását, és a megoldás diszkusszióját foglalja magában. Ebből az is következik, hogy a probléma relatív és szubjektív. Valakinek még nem, valakinek már nem, és valakinek éppen aktuálisan probléma az adott feladvány. (Függ az egyén képességétől, képzettségétől, motiváltságától.)

A gondolkodás szerkezeti felépítése

A gondolkodás makrostruktúrája

A pszichológiai kutatások igazolják, hogy a problémahelyzet felszámolásának, a megoldás menetének vannak jellemző csomópontjai, fázisai. Ezen fázisok összessége adja a makrostruktúrát.

A problémamegoldás jellemző fázisai (Lénárt Ferenc munkája alapján)

1. *Ténymegállapítás*

A problémahelyzet feltárása, (esetleg megértése), a probléma adatainak, vagy a megoldás menetében felismerhető bármely összefüggésnek a megnevezése.

A ténymegállapítás lehet tervszerű, spontán, téves, irreális és szubjektív.

- A *tervszerű* ténymegállapítás azt jelenti, hogy az itt szerzett információkat a megoldás menetében felhasználja a tanuló akár az összefüggések feltárásában, akár a tervekészítésben.
- A *spontán* ténymegállapításra jellemző az „ad hoc” jelleg, az esetlegesség. Ezeket a tényeket ritkán lehet hasznosítani a megoldás menetében, mert nagyon gyakran nem a tényekre vonatkoznak.
- *Téves* a ténymegállapítás, ha az adatok, a tények között olyan összefüggések meglétét véli felfedezni a tanuló, ami a valóságban nincs meg, vagy egészen

más jellegű kapcsolat van közöttük. A téves ténymegállapításnak legtöbbször a hiányos előképzettség, és gyakran a tanulói türelmetlenség az oka. A ténymegállapításnak ez a fajtája mindig rossz megoldást eredményez.

- Az *irreális* ténymegállapítás jellemzője, hogy a tanuló elhagyja a realitás talaját, fiktív adatokat „vet be” a megoldási folyamatba, olyanokat, amelyek vagy nincsenek a tények között, – de ő belegondolta, – vagy nem létező kapcsolatokat vél felfedezni az adatok között.
- A *szubjektív* ténymegállapítás során a tanuló saját korábbi élményeit, tapasztalatait próbálja alkalmazni a feladat megoldása során. Olyan tapasztalatokat, amelyek nem, vagy csak nagyon kis mértékben kapcsolódnak a tartalmi vonatkozásokhoz.

Mivel a probléma megoldásának alapja a helyes ténymegállapítás, ezért a tanári tevékenységnek arra kell irányulnia, hogy a tervszerűség legyen a jellemző erre a mozzanatra, a többit pedig ki kell iktatni a tanulók kelléktárából. Ez megfelelő tanári kérdésekkel, és megfelelő módszerrel, a szókrateszi dialógussal történhet leginkább.

A megfelelő tanári kérdések, érthetők, nem félreérthetők, gondolkodtatók, lényegyet kiemelők. A szókrateszi dialógust a tanulók helytelen ténymegállapítására adott megfelelő tanári ellenpéldák jelentik, amelyekkel a tanuló saját maga jön rá tévedésére.

2. *A probléma módosítása*

Andreas Revuz egy munkájában olvashatjuk:

A matematikai szakkifejezések úgy viszonyulnak a köznapi nyelv szavaihoz, mint wertheimkulcs a sperhaknihoz. A köznapi szavak jelentése általában elég határozatlan. A matematika ki akarja küszöbölni ezt a kétértelműséget. Ki is küszöböli, de ezáltal elveszti az érintkezés könnyedségét. Minél gazdagabb, és szabadabb egy információ, annál nehezkesebb az átültetése.

(A. Revuz: Modern matematika, élő matematika munkája nyomán)

(Wertheimkulcs: nagy precizitású, bonyolult mintázatú kulcs, például páncélszekrényhez, trezorokhoz; sperhakni: egy közepes méretű szegből készített, a végén behajlított és ellapított eszköz, amivel az egyszerű zárok nyithatók.)

Pólya György pedig azt írja, hogy „A szöveges feladatok megoldása során jelentkező problémák általában fordítási nehézségek. Ha a tanuló meg akarja érteni a feladatot, le kell fordítania a saját nyelvére”.

(Pólya György: A gondolkodás iskolája, Akkord Kiadó, Budapest, 2000)

Mint ismert a matematikai fogalomrendszert mindenki saját maga alakítja ki, így ez a „saját nyelv” nagyon változó, minden tanulónál más és más. Ez egyben azt is jelenti, hogy a tanulók egymástól különbözőképpen – nagyon sokféleképpen – módosítják, fogalmazzák át a problémát, éppen úgy, hogy az beilleszkedjen a saját fogalomrendszerükbe, és tudják aktivizálni meglévő ismereteiket a probléma megoldásában.

Tehát a probléma módosítása a megoldás szempontjából célszerű változtatások végrehajtását jelenti. Ezek a változtatások egy más, egy új megfogalmazást jelentenek, továbbá új kapcsolatok feltárását, a meglévő ismeretek módosítását, az újhoz való idomulását is magukban foglalják.

A problémamegoldási folyamatnak egyik legfontosabb mozzanata ez, hiszen így érti meg a tanuló a problémát, így tudja lefordítani saját nyelvére, és ezek után lesz képes a tényekkel tudatos tevékenységet folytatni. Egyébként a probléma módosítása is lehet – tanulótól, előzetes ismeretektől, előképzettségtől függően – reális, irreális, téves, szubjektív, vagy tervszerű.

Mivel, mint írtuk, a probléma módosítása erősen tanulófüggő, így a tanárnak komoly szakmai, és módszertani felkészültséggel kell rendelkeznie ahhoz, hogy minden tanulónak az ő saját szintjén tudjon segíteni.

3. *Megoldási javaslatok, tervekészítés*

Minden tanár szembesült már azzal a problémával, hogy tanítványai a feladatban szereplő adatokkal „ad hoc” jellegű, véletlenszerű műveleteket végeznek (sokszor jól), de amikor indokoltatja őket, akkor nem helytálló, semmitmondó indoklást adnak. Ezt a fajta látszatomunkát, nem tudatos matematikai tevékenységet hivatott a tervekészítés megkövetelése kiküszöbölni.

A megoldás megtervezése azt jelenti, hogy esetleg számok, adatok nélkül végiggondoljuk a probléma megoldásának folyamatát, felsoroljuk az egyes lépéseket.

A tervekészítés lehet egy ábra rajzolása, és ennek elemzése, lehet egy táblázat, grafikon készítése, egyenlet, egyenlőtlenség felírása stb.

A megoldási javaslatok azért is fontosak, mert így hamar kiszűrhetők a megoldások zsákutcái, és korrigálhatók a tervek, vagy újabb terv (tervek) készíthetők. Mivel nem a probléma megoldásakor (a végeredménynél) jön rá a tanuló a megoldás helytelenségére, így időt nyerhet, és megkímélheti magát a felesleges munkától, illetve az ezzel járó elkedvetlenedéstől.

A tervekészítésnek része a megoldás lehetőségének többirányú megközelítése is. A tanárnak ennél a mozzanathoz is következetesnek kell lenni, mindig meg kell követelnie a tervekészítést, és, ha a tanuló képtelen rá, akkor a tanár által készített tervek folyamatos reprodukálásával kell a hozzá szükséges alapokat megteremteni.

4. *Kritika*

Akkor eredményes a tanár munkája a probléma megoldási folyamatban, ha ezt a mozzanatot kialakítja tanulóiban. A kritika azt jelenti, hogy saját ténymegállapításával, problémamódosításával, megoldási tervével kapcsolatban állásfoglalást fogalmaz meg a tanuló. Ez is lehet helyes, vagy helytelen, reális, vagy irreális. A helytelen, vagy irreális kritika is jobb, mint az, hogy a tanuló „kritika nélkül” fogadja el jónak saját tevékenységét. A kritika magában foglalja a saját képességeinkben való kételkedést is.

Többször hallhatjuk tanítványainktól: „Ezt nem lehet megoldani”, „Ezt nem tudom megoldani”. Mindkét esetben, megfelelő tanári munkával orvosolni lehet a tanuló ilyen irányú kételyeit, és helyes irányba terelni kritikáját. Leginkább ezt úgy tehetjük, hogy számba vesszük a kedvező és kedvezőtlen mozzanatokot, majd a kedvező mozzanatok hangsúlyozásával, kiemelésével erősítjük a tanulók reális kritikáját.

5. *Mellékes mozzanatok említése*

A problémával, a matematikai tartalommal semmilyen összefüggésben nem lévő megjegyzéseket tesz a tanuló. Ez leginkább akkor következik be, amikor zsákutcába jutott, és nincs újabb ötlete a probléma megoldására. Ez a fázis azért veszélyes, mert eltereli a tanuló gondolkodását a feladat megoldásától. Nagyon nehéz a tanár számára ennek a kiküszöbölése. Nagy körültekintést és pedagógiai tapintatot igényel az, hogy a tanulót visszatereljük a gondolkodás helyes medrébe. Rövid,

lényegre törő, könnyen megválaszolható kérdések adják ehhez a legnagyobb segítséget.

6. *Érzelmi mozzanatok*

Ennek a fázisnak nincs sok köze a feladat megoldásához tartalmilag, de formailag nagyon fontos elem. Nevezetesen, a motivációt erősen befolyásoló tényezőről van szó. Ez lehet pozitív, azaz a gondolkodást serkentő, és negatív, azaz a gondolkodást gátló érzelmi mozzanat.

Például ilyen pozitív mozzanat a csodálkozás, a tetszés, az öröm a helyes megoldás után. Ezt nevezzük sikerélménynek.

Példa a negatív mozzanatra az idegesség, a türelmetlenség, a zavar, az indulatosság, a düh, a bosszúság stb. Ez mindig a munka sikertelensége után, vagy közben jelentkezik. Ez a sikertelenség, vagy a kudarc érzete, ami a további matematikai tevékenységre is kihat.

A tanár feladata az, hogy pozitív érzelmi töltést alakítson ki tanítványaiban a matematikai problémák megoldása terén. Olyan fokozatosan nehezedő feladatsorokat állítson össze, és olyan mértékű segítséget adjon a tanulóknak, hogy a sikerélmény fokozatosan a kudarcérzet fölé kerekedjen.

Természetesen a balsiker, a kudarc is eredményezhet pozitív motivációt. Nevezetesen a sikertelenség sok esetben kialakíthatja a tanulóknak a „csak azért is” érzést, ami olyan dacot vált ki a tanulóban, ami megoldás iránti igénnyé alakul át, azaz pozitív töltésűvé válik.

7. *A probléma megoldása, vagy a munka feladása*

Az egész probléma megoldási folyamatnak az utolsó mozzanata. Ez az elem szorosan kapcsolódik a tartalmi részekhez (megoldottuk a feladatot, vagy nem, jó a megoldásunk, vagy nem), de éppen emiatt jelentős érzelmi töltéssel is bír.

A probléma megoldása sikerélményt jelent. A belső feszültség megszűnik, teljesített a tanuló egy fontos, maga elé kitűzött célt. Ez a sikerélmény annál nagyobb, minél jelentősebb volt a rá fordított energia. Ennek végső formája a „szellemi gyönyörélmény”, ami óriási belső motivációt jelent. Az ilyen élmények után a tanuló már magáért a problémamegoldásért fogja szeretni és művelni a matematikát, és nem jutalomért, vagy az esetleges elmarasztalás elkerüléséért.

A kudarc megélése nagyon gyakran a munka feladásával jár. Ez azt jelenti, hogy a tanuló menekül a kellemetlen szituációtól, a kényelmetlen belső pszichikus feszültségtől. (Ez utóbbit előzik meg gyakran a korábban említett negatív érzelmi mozzanatok.) Ha a tanár észleli, hogy tanítványa „elérkezett” a munka feladásához, mindenképpen lépnie kell. Oly mértékű segítségadás, egyszerűbb feladatokkal történő rávezetés, megfelelően segítő kérdések adása szükséges, hogy a tanuló akarja *újrakezdeni* a munkát. Ha a munka feladását közvetlenül követi az újrakezdesre való hajlam a tanuló részéről, akkor a negatív motiváció fokozatosan alakul át pozitív motivációvá. Ezzel az eljárással vissza tudjuk vezetni a tanulót a problémamegoldás helyes útjára.

Ezzel a Lénárt-féle értelmezéssel teljesen összhangban vannak Pólya Györgynek a probléma megoldási folyamatra kidolgozott alapelvei. A gondolkodás iskolája című művében „Hogyan oldjunk meg feladatokat?” címmel az alábbi fázisokat különbözteti meg.

„A feladat megértése

- *Mit keresünk? Mi van adva? Mit kötöttünk ki?*
- *Kielégítő-e a kikötés? Elegendő a kikötés az ismeretlen meghatározásához? Vagy nem elegendő? Vagy kevesebb is elég volna? Vagy ellentmondás van benne?*
- *Rajzolj ábrát! Vezess be alkalmas jelölést!*
- *Válaszd szét a kikötés egyes részeit! Fel tudod írni őket?*

Tervkészítés

- *Nem találkoztál már a feladattal? Esetleg a mostanitól kicsit eltérő formában?*
- *Nem ismersz valami rokon feladatot? Vagy olyan tételt, aminek hasznát vehetnéd?*
- *Nézzük csak az ismeretlent! Próbálj visszaemlékezni valami ismert feladatra, amelyben ugyanez – vagy ehhez hasonló – az ismeretlen.*
- *Itt van egy már megoldott rokon feladat. Nem tudnád hasznosítani? Nem tudnád felhasználni az eredményét? Nem tudnád felhasználni a módszerét? Nem tudnád esetleg valami segédelem bevezetésével felhasználhatóvá tenni?*

- Nem tudnád átfogalmazni a feladatot? Nem tudnád másképpen is átfogalmazni? Idézd fel a definíciót!
- Nem boldogulsz a kitűzött feladattal, próbálkozzál először egy rokon feladattal. Nem tudnál kigondolni egy könnyebben megközelíthető rokon feladatot? Egy általánosabb feladatot? Vagy egy speciálisabbat? Vagy egy analóg feladatot? Nem tudnád megoldani legalább a feladat egy részét? Tartsd meg a kikötés egyik részét, a többit ejtsd el! Mennyire van így meghatározva az ismeretlen, mennyiben változhat még? Nem tudnál az adatokból valami hasznosat levezetni? Nem tudnál mondani más adatokat, amelyek alkalmasak az ismeretlen meghatározására? Meg tudnád úgy változtatni az ismeretlent vagy az adatokat, vagy ha szükséges, mind a kettőt, hogy az új ismeretlen és az új adatok közelebb essenek egymáshoz?
- Felhasználtál minden adatot? Számításba vetted az egész kikötést? Számba vetted a feladatban előforduló összes lényeges fogalmat?

Tervünk végrehajtása

- *Ellenőrizz minden lépést*, amikor végrehajtod tervedet! Bizonyos vagy benne, hogy a lépés helyes? Be is tudnád bizonyítani, hogy helyes?

A megoldás vizsgálata

- Nem tudnád *ellenőrizni az eredményt*? Nem tudnád ellenőrizni a bizonyítást?
- Nem tudnád másképpen is levezetni az eredményt? Nem tudnád az eredményt egyetlen pillantásra belátni?
- Nem tudnád alkalmazni az eredményt vagy módszert valami más feladat megoldására?”

A két elemzést összevetve megállapíthatjuk, azon túl, hogy teljes az összhang a két értelmezés között, Pólya György nagy érdeme az, hogy az ő alapelvei jól algoritmizálhatók, jól alkalmazhatók a matematikai problémák megoldására. A Lénárd Ferenc által mondottak a megoldás didaktikai oldalát emelik ki.

Mind a Pólya-, mind a Lénárd-féle megközelítés feltételezi a gondolkodási műveletek meglétét. A gondolkodási műveletek együttese adja a gondolkodás mikrostruktúráját. Ha

végignézzük a gondolkodás fázisait, akkor láthatjuk, hogy minden egyes fázis a gondolkodási műveletek sokaságát feltételezi.

Például a ténymegállapítás elképzelhetetlen analízis, szintézis, általánosítás, specializálás, összehasonlítás, lényegkiemelés, ítéletalkotás nélkül.

A probléma módosításához is szükséges a konkretizálás, a specializálás, az összehasonlítás, a rendezés, az összefüggések feltárása, az ítéletalkotás és a transzferálás.

A sort még hosszan lehetne folytatni.

A gondolkodás mikrostruktúrája

A gondolkodási műveletek értelmezését, illetve fejlesztési lehetőségét részletesen elemeztük a Kompetenciaalapú matematikaoktatás című elektronikus jegyzetben. (TÁMOP 4.1.2.-08/1/A-2009-0038, Eger)

Ebben a fejezetben – hogy bemutassuk a gondolkodásfejlesztés pedagógiai-pszichológiai egységét a maga teljességében – felsorolásszerűen, rövid elemzéssel ismertetjük a gondolkodási műveleteket.

– Analízis – szintézis

Az adott ismeretet részeire bontjuk, e részeket önálló egészeknek fogjuk fel, elvégezzük ezekkel a kívánt vizsgálatokat, műveleteket, majd a szerzett ismereteket összerakjuk egészszé. Az analízis nem választható el a szintézistől, ezért ezt a két gondolkodási műveletet együtt tárgyaljuk.

Például a geometriai szerkesztések során, amikor a vázlat készítése után elemezzük az adatok közti összefüggést, ezt úgy tesszük, hogy megvizsgáljuk az alkotóelemek (részek) tulajdonságait, ezek összefüggését, azaz analizálunk, majd az ismeretek birtokában elvégezzük a szerkesztést, azaz szintetizálunk.

A szöveges feladatok megoldásánál, ha a kérdésekből indulunk ki, azaz részekre bontjuk a feladatot, s válaszolunk az egyes részek kérdéseire (analízis), majd e részeket összerakjuk, hogy megkapjuk a megoldást (szintézis). Vagy, ha az adatokból indulunk ki, megvizsgáljuk, hogy ezek együttese milyen kapcsolatok feltárása, milyen műveletek elvégzése után eredményezi a helyes megoldást.

A megértésnél inkább az analízis, a problémamegoldásnál pedig a szintézis dominál.

– *Absztrahálás*

Konkrét dolgoknak közös tulajdonságát emeljük ki, azaz egy elemből következtetünk az őt tartalmazó halmazra (absztrahálunk).

Matematikában minden fogalom gondolati absztrakció, így e műveletnek a matematikai fogalomalkotásban óriási szerepe van. (Ennek hiánya azt eredményezi, hogy a tanuló nem képes definíciót megadni.)

Például ilyen absztrakció a természetes szám fogalma, mint véges halmazok számossága. Eltekintünk attól, hogy milyen tárgyak vannak a halmazban, csak a számuk érdekes. Ez a közös tulajdonság a halmazokban.

– *Konkretizálás*

A halmazra jellemző tulajdonságot vonatkoztatjuk annak egy elemére (konkretizálunk).

Például, ha a négyzet területe a^2 , akkor a 3 cm oldalú négyzeté $3^2 = 9$ (cm²). Az absztrakt és konkrét között halmaz – eleme viszony áll fenn.

– *Általánosítás*

Általánosítás során egy halmazból az őt tartalmazó halmazra térünk át (például a négyszögek halmazábrája).

Az általános és a speciális között halmaz – részhalmaz viszony van.

– *Specializálás*

Specializálás során valamely halmaz részhalmazára következtetünk. (Például: speciális trapéz a paralelogramma.)

Az absztrakt – konkrét között halmaz – eleme viszony, míg az általános – speciális között halmaz – részhalmaz viszony áll fenn.

– *Összehasonlítás*

Olyan gondolkodási művelet, amelynek során különböző tárgyokról, fogalmakról, ismeretekről stb. döntjük el, hogy ők maguk, vagy tulajdonságaik megegyeznek-e, vagy különböznek egymástól.

Például:

- végtelen szakaszos tizedes tört – racionális szám
- $0,9999\dots = 1$; legalább $5 \neq$ kisebb, mint 5.

– *Kiegészítés*

Egy adott elemhez (objektumhoz) valamely ismert kapcsolat alapján meg tudjuk adni a neki megfelelő elemet. Például: bűvös négyzet, szabályjátékok, mondat-kiegészítések.

– *Rendezés*

Adott halmazzt meghatározott szempont szerint részhalmazaira, vagy elemeire bontunk. Például: relációk – függvények – lineáris függvények.

– *Analógia*

Az analógia gondolkodási művelet képessé teszi a tanulót arra, hogy korábban tanult algoritmusokat, tételeket, definíciókat felismerve új helyzetben alkalmazza azokat, illetve egy problémát általánosítson, vagy kiegészítsen, kiterjesszen.

A matematikai feladatmegoldásokban nagy segítség, ha a tanuló az adotthoz hasonló feladatot már megoldott. A hasonlóság mind tartalomban, mind megoldási módban értendő. Így alkalmazva a hasonló feladat megoldási módját könnyebben boldogul a tanuló az új feladattal.

Szép példa a sík és a tér analógiája. Például kúpba írt gömb – háromszögbe írt kör stb.

– *Összefüggések feltárása*

Két vagy több halmaz, illetve azok elemei közötti kapcsolat megkeresése. A matematikai feladatok (főleg szöveges és szerkesztési feladatok) megoldása elképzelhetetlen e gondolkodási művelet nélkül. Ha erre a műveletre nem képes a tanuló, feladatmegoldása véletlenszerű, tudatosságtól mentes lesz. Ez összetett gondolkodási művelet, feltételezi a korábbi gondolkodási műveletek meglétét.

– *Lényegkiemelés*

Szükséges adatok, tények, összefüggések kiválasztása, a felesleges, lényegtelen, zavaró tényezők kizárása.

Egy problémamegoldás során többszörösen is alkalmazzuk ezt a gondolkodási műveletet.

– *Ítéletalkotás, döntés*

Mind a megoldás megtervezésekor, mind a problémahelyzet felismerésekor, a feladat megoldása utáni ellenőrzéskor nélkülözhetetlen ez a gondolkodási művelet.

– *Fogalomalkotás*

Mint ismert, a matematikai fogalmak gondolati absztrakciók, és egyben alapjai a matematikai tevékenységnek, a problémák felismerésének, a matematikai gondolkodásnak.

– *Bizonyítás*

A matematikában a definíció – tétel – bizonyítás – alkalmazás fázisok követik egymást a tanulás során szinte minden témakörben. A feltétel – állítás, az ok – okozat, a bizonyítási eljárás algoritmusának felismerése, alkalmazása jelenti a bizonyítás lényegét. Az eredményes problémamegoldó gondolkodás nem képzelhető el a bizonyítás, gondolkodási művelet nélkül.

– *Transzferálás*

Egy adott ismeretnek más összefüggésben történő alkalmazását, más ismeretrendszerbe való beépítését jelenti. Közel van az analógiás gondolkodáshoz, csak míg az analógiánál az egymáshoz viszonylag közeli ismeretrendszerek közti kapcsolatot használjuk ki, addig a transzfernél az egymástól látszólag „messze lévő” ismeretek közti kapcsolatokat tárjuk fel, és alkalmazzuk.

Ez utóbbi öt gondolkodási művelet különösen feltételezi a többi művelet meglétét, és ezek szerves kapcsolatának alkalmazását, ezért ezeket *többszörösen összetett gondolkodási műveleteknek* nevezzük.

Akár a megértést, akár a problémamegoldást tekintjük, elmondhatjuk, hogy a gondolkodás fejlesztéséhez elengedhetetlen a gondolkodási fázisok és a gondolkodási műveletek ismerete. A tanár akkor tudja a logikus gondolkodás terén a tanítványaiból a maximumot kihozni, ha az itt felsorolt alapelveket tudatosan felhasználja a tanórára való készülés során, illetve a tanórai effektív munkában.

Kulcsszavak

emlékezet

képzelet

gondolkodás

tanulás

a gondolkodás makrostrutúrája

gondolkodási fázisok

a gondolkodás mikrostrutúrája

gondolkodási műveletek

Kérdések, feladatok:

1. Ismertesse a problémamegoldó gondolkodás jellemzőit!
2. Milyen gondolkodási fázisokat sorol fel Lénárd Ferenc, és milyeneket Pólya György? Adjon a két elméletről egy összehasonlító elemzést!
3. Elemezze a gondolkodás mikrostruktúráját! Sorolja fel és elemezze a gondolkodási műveleteket!

Kötelező irodalom:

1. Ács Pál szerkesztésében: A matematika tanítása, jegyzet
Tankönyvkiadó, Budapest, 1979
2. Pólya György: A gondolkodás iskolája
Akkord Kiadó, Budapest, 2000

Ajánlott irodalom:

- Dr. Hadházy Jenő: A pszichológia alapjai, jegyzet
Élmény '94 Bt., Nyíregyháza, 2003
- Ács Pál szerkesztésében: A matematika tanítása III., jegyzet
Tankönyvkiadó, Budapest, 1985

VIII. A matematikatanításban alkalmazott munkaformák, módszerek, eszközök

Egy osztályban – bármely évfolyamon – nehezen található két olyan tanuló, akiknek megegyezik az alapképzettsége, a gondolkodási műveletekben való jártassága, a terhelhetősége, a koncentrációképesége, a kitartása, ebből következően változó a tanulás gyorsasága, intenzitása, mélysége, eredményessége stb.

Így a tananyag tartalmi elemzésén túl meg kell vizsgálnunk azokat a formai elemeket, amelyek segítségével az iskolai ismeretszerzés megvalósul, hogy a fenti különbözőségek ellenére tanítási munkánk hatékonyságát növelhessük minden szintű, és képzettségű tanulónál. Fontos ez azért is, mert a megismerés – ily módon a tanítási-tanulási tevékenység – nem befogadó, passzív, hanem aktív, teremtő folyamat. A megismerés nem befogadás, hanem alkotás.

Minden pedagógusnak – ha munkája hajlékonyságát növelni akarja – meg kell keresni azokat a lehetőségeket, amelyekkel ezt az alkotást minden tanuló számára lehetővé teszi. Hiszen, mint korábban is írtuk, a matematikai ismeretek rendszerét mindenki saját magának alakítja ki, a pedagógus ehhez „csak” megteremti az optimális feltételeket. A merev osztálykeretek, a túlzott tanári szereplés, az egysíkú módszerek gyakran nem biztosítják ezeket a feltételeket.

A megfelelő munkaformák, módszerek, eszközök, megválasztása éppen azt a célt szolgálja, hogy ezeket a lehetőségeket biztosítsuk a tanulók számára., s a matematikai tartalmat úgy közvetítsük a tanulóknak, hogy mindenki – vagy legalábbis a legtöbb tanuló – a számára legmegfelelőbb módon sajátíthassa el az ismereteket.

A didaktikában tanult munkaformákat, módszereket nem elemezzük részletesen, pusztán felsoroljuk azokat (néhány sajátosságukat kiemelve), s megmutatjuk, hogy a matematikatanításban melyiket, hogyan célszerű használni.

Munkaformák

A munkaformák a tanítás-tanulás szervezési formái. Azt vizsgáljuk ebben a fejezetben, hogy egy osztály tanulói milyen „szervezeti egységekbe” sorolhatók, hogyan alakíthatók ki olyan „tanulóközösségek”, amelyekben a megfelelő módszerek megválasztásával eredményesen tudunk dolgozni.

1. Frontális osztálymunka

Az iskolai oktatás alapvető szervezeti kerete az *osztály*. Az osztály létszáma – iskolától, településtől, szociális viszonyoktól, értelmi állapotoktól függően – széles

intervallumban mozog. A szükségletek és a lehetőségek határozzák meg. (Kis terepülések, kevés tanuló: 8-10 fős osztályok; nagyobb települések, nagyobb iskolák, párhuzamos osztályok: 25-36 fő – főleg középiskolákban.)

Az osztályrendszerű munka a XVI – XVII. században alakult ki és terjedt el, majd elsőként Comenius írta le és indokolta a rendszert. A tanulókat életkoruk, a tanulmányokban elért előmenetelük, előképzettségük, értelmi fejlettségük alapján csoportosíthatjuk osztályokba. Sajnálatos, hogy jelenleg szinte csak az életkor az, ami szerint a tanulókat osztályokba soroljuk, és a többi jellemzőt – ami lényegesen hangsúlyosabb a tanítási-tanulási folyamatban – figyelmen kívül hagyjuk.

A *frontális osztálymunka* azt jelenti, hogy az osztályt nem tagoljuk tovább, egységes egésznek tekintjük. Minden tanuló ugyanazon tananyaggal, ugyanolyan ütemben, ugyanolyan intenzitással és mélységben dolgozik. Rögtön látható, hogy ez a szervezési forma minden tanulót „egy kalap alá vesz”, azonos képességűnek, képzettségűnek tekint, figyelmen kívül hagyva a köztük lévő, minden téren jelentkező, óriási különbségeket.

Ezek a hiányosságok megkérdőjelezzik ennek a munkaformának a kizárólagosságát, még akkor is, ha a legjobb módszereket választjuk hozzá. Teljesen elvetni nem kell, de szükséges más munkaformákat is alkalmaznunk oktatásunk hatékonyságának növelésére.

2. Csoportmunka

Mint az előzőekben említettük az osztálykeretekben folyó frontális munka feltételezi, hogy a tanulók ugyanazokért a célokért, ugyanolyan időtartamban, azonos tartalom elsajátítása érdekében, egységes tanulási feltételek mellett, közel azonos minőségű motivációval dolgozzanak. Mivel osztálykeretekben ennek megvalósítása szinte lehetetlen, szükséges az osztály tanulóit olyan kisebb csoportokra bontani, amelyekben a tanulók minden-oldalú fejlesztését leginkább biztosítani tudjuk. Olyan kisebb csoportokat célszerű létrehozni, hogy a csoportokban lévő tanulók közel azonos tudással, készségszinttel, előfeltételekkel, motivációval rendelkezzenek, ugyanolyan információforrással dolgozhassanak, figyelmük aktivitása, tartóssága, mélysége is közel megegyezzen, és a csoport tagjai azonos követelmények teljesítésére legyenek képesek. (A csoportbontásnak ezt a fajtáját *homogén csoportokra bontásnak* nevezzük. Amennyiben a képességekben, képzettségekben lényeges különbség van a csoport tagjai között, akkor *heterogén csoportokról* beszélünk.)

A csoportmunka fajtái

– *Tanulópárok, mint mikrocsoportok*

A párban folyó tanulás lényege, hogy két tanulónak együtt kell működni valamely ismeret elsajátítása, vagy valamely probléma megoldása érdekében. Lehet közel azonos szinten álló és különböző szinten álló tanulókat egy párba beosztani. Mindig az adott munka határozza meg az összetételt.

Például új ismeretek szerzése esetén jó, ha egy jobb képességű tanuló segíti a gyengébb képességű tanulót a kísérletek elvégzésében, a tapasztalatok összegyűjtésében és megfogalmazásában, illetve a lényeg kiemelésében.

Ha az ismeretek begyakoroltatásáról van szó, akkor szerencsés a közel azonos szinten álló tanulókat egy párba rakni. Így elkerülhetjük az úgynevezett „másolási gyakorlatot”, amikor a jobb képességű tanuló csak lediktálja a gyengébbeknek a feladat megoldását.

Tudunk differenciálni is, hiszen a jó képességű tanulókból álló pár erősebb és több feladatot tud megoldani, míg a gyengébb képességű tanulópárok lassúbb haladási ütemben, több tanári segítséggel pótolni tudják hiányosságait, és képességeiknek megfelelő problémákat oldanak meg. (Legalább a minimum-követelmények teljesítéséig eljutnak.)

A páros munka során a tanulók beleélhetik magukat a társak szerepébe, kialakulhat, fejlődhet mindkét fél kommunikációs készsége, továbbá a toleranciára és az együttműködésre való hajlam is erősödhet. Az egymásért való felelősségvállalást pedig a tanulópárok közös értékelése biztosítja.

– *Homogén csoportmunka*

Minden csoportmunka *közös tanulási tevékenységet* jelent. Tehát mi a kisebb csoportokban végzett egyéni munkát nem tekintjük csoportmunkának.

Az osztályt 3-4 fős csoportokra osztjuk. (a 4 főnél több tanuló már nehezen kezelhetővé teszi a csoportot a tanár számára, és a közös tevékenység is erősen megkérdőjeleződik. Magasabb lesz a zajszint, nincs kellő kommunikáció, és főleg nincs közös munka, közös megbeszélés, hiányzik az egymás megsegítése.)

Közel *azonos képességű, képzettségű, adottságú tanulók kerülnek egy csoportba* egy konkrét probléma megoldására. Minden tanuló ugyanazon a

problémán dolgozik, ugyanazt a műveletet végzi, és valamelyikük elakadása esetén igénybe veszi a többiek segítségét. Fontos a tanulók közti állandó kommunikáció, és munkájuknak a többiek által történő folyamatos ellenőrzése, illetve a megoldási ötletek, tervek átadása-átvétele.

Munkamegosztásos homogén csoportmunka is elképzelhető. Ekkor az adott probléma megoldásának lépéseit felosztják egymás között a csoport tagjai (például: egyik mér, másik számol, harmadik ellenőriz stb.), majd a kapott részeredményeket összesítik.

Mindkét esetben fontos, hogy legyen egy olyan rátermett, a munkát jól irányító csoportvezető, akit a tanulók is elfogadnak. A matematikatanításban a csoportmunkát akkor célszerű használni, ha az ismeretelsajátítási munka során a tanulók képzettsége már differenciálódott, és nem terhelhetünk minden tanulót ugyanolyan erősségű problémával az unalom, illetve az értetlenség veszélye nélkül. (Éppen ezzel próbáljuk a frontális osztálymunka hátrányait kiküszöbölni.)

Szerencsés az osztályt olyan csoportokra bontani, amelyekbe sorolt tanulók teljesítménye jó, átlagos, illetve az átlagnál gyengébb. Ezáltal megvalósíthatjuk azt az alapelvet, hogy minden tanulót képességének, képzettségének megfelelő feladattal látjuk el, mindenki a saját ütemében fejlődhet. A tanári segítség mértéke és minősége is jól tervezhető az egyes homogén csoportoknál.

Tehát ezzel a szervezési formával tudunk differenciálni:

- a tananyag tartalmában,
- a követelményekben,
- a tanári segítség mértékében,
- az eszközhasználatban,
- a haladási ütemben,
- az ellenőrzés, értékelés módjában.

Természetes módon a leggyengébb csoportok igénylik a legnagyobb tanári figyelmet. Arra is ügyelnünk kell főleg gyengébb csoportoknál, hogy ne álljon elő a „vak vezet világtalant” szindróma, amikor is a csoporton belül nem tud segítséget adni az egyik tanuló a másikkal, vagy rossz segítséget ad. Ez megint a jól megtervezett tanári segítséget, a nagyobb odafigyelést hangsúlyozza.

– *Heterogén csoportmunka*

Az osztályt 3-4 fős különböző képességű, képzettségű, adottságú tanulók csoportjaira bontjuk. A jobb képességű tanulóknak irányító, segítő funkciót kell ellátniuk. Matematikaórákon általában az új ismeretek szerzésekor szerencsés alkalmazni. A jobb képességű csoportvezető megszervezi a konkrét tárgyi tevékenységet, megadja a megfigyelési szempontokat, szétosztja a munkát a csoport tagjai között, irányításával közösen kiemelik a fogalmak, ismeretek lényeges jegyeit, ezeket összegzi és definíció, tétel, szabály, algoritmus formájában megfogalmazza.

Tehát a heterogén csoportok kulcsfigurája az értelmes, jó szervező készséggel megáldott, jó kommunikatív képességgel rendelkező csoportvezető, akit a többiek fenntartás nélkül elfogadnak.

Az óra menetében a különböző csoportok egy adott probléma más-más oldalát vizsgálják, vagy ugyanazt a kísérletet végzik el, mert szükséges a nagy adathalmaz a konklúzió levonásához.

Például: A sokszögek külső és belső szögei összegének meghatározásakor az egyes csoportok különböző oldalszámú sokszögeket kapnak, vizsgálják az átlók számát, hogy az egy csúcsból kiinduló átlók hány háromszögre bontják a sokszöget, mennyi ezen sokszögek belső szögeinek összege és mennyi a külső szögek összege. A különböző heterogén csoportok által gyűjtött tapasztalatokat a tanár segítségével közösen táblázatba rendezik, a lényegét kiemelik, sejtéseiket megfogalmazzák, majd tapasztalataikat a többi csoport eredményeinek felhasználásával általánosítják. Így minden csoport, és az egyes csoportokon belül minden tanuló részt vesz a felfedezésben, aktív tanulást folytat és közös sikerélményt ér el. Közben fejlődik a kommunikációs képességük is, valamint erősödik a közösségi szellem a csoporton és az osztályon belül is.

A gyakorló órán való heterogén csoportok alkalmazását azért nem tartjuk szerencsésnek, – főleg, ha versenyeznek is egymással a csoportok – mert ekkor a jobb képességű tanuló nagy valószínűséggel lediktálja a gyengébb tanulóknak a megoldást, aki értelem nélküli tanulás folytán esetleg megjegyzi az ismereteket, de ez az ismeret nem lesz alapos, nem lesz tartós és főleg nem lesz alkalmazásra képes. A tanulók közötti ilyen fajta információáramlás inkább a

„receptek” (a megoldási lépések) közlését jelenti csak. Ez viszont nem elfogadható a matematikai ismeretelsajátításban.

3. *Egyéni munka* (individualizált foglalkoztatási mód)

Ez a tanulásszervezési mód maximálisan alkalmazkodik a tanulók képességeiben, képzettségeiben, adottságaiban, előzetes ismeretrendszerében, haladási ütemében, tanulási intenzitásában, stratégiájában, mélységében, kitartásában megnyilvánuló különbözőségeihez. Elvileg minden tanuló számára biztosítani tudja a megfelelő haladási ütemet, a problémák megfelelő szintjét, az egyénre szabott tanári segítség mértékét, azaz az optimális utat a sikeres tanuláshoz. Ez azt jelenti, hogy minden tanuló a rá kirótt feladatokat társaitól függetlenül végzi – szükség esetén tanári segítséggel. (Az individualizált tanulás nem azonos az önálló tanulással.)

Fontos a tanárral való bizalmon alapuló kapcsolat. Esetleg hátrányként jelentkezik az a tény, hogy ennél a formánál az értékelés nem a tanulótársakhoz, hanem önmagához viszonyított.

Az individualizált foglalkoztatási mód feltételei:

- viszonylag kis osztálylétszám,
- az osztálytermeken belül elkülönített tanulási helyek,
- a tanulást segítő taneszközök, tankönyvek, egyéb irodalmak széles skálája,
- nem órarend szerinti időbeosztás,
- a tanulóra meghatározott célok, célrendszerek,
- egyéni értékelési szisztéma,
- szakmailag, módszertanilag, pedagógiailag, pszichológiailag jól felkészült pedagógus.

A felsoroltakon túl még azt is a feltételekhez sorolhatjuk, hogy az így tanító pedagógusnak a kötelező heti óraszám ne legyen 10-nél több, hiszen, ha meg akar felelni az egyéni munkában folyó tanítás feltételeinek, akkor az otthoni folytonos napi tervező munkája legalább kétszer annyi időt igényel, mint a tanórai tevékenysége.

E tanulási mód jellemzéséből és feltételeiből látszik, hogy a magyar közoktatásban ennek a szervezési módnak az általánossá tétele még utópia. Sem a személyi, sem a tárgyi, sem a gazdasági feltételek nem adóttak ehhez.

Viszont meg kell jegyeznünk, hogy mind a hátránykompenzációnál, mind a tehetséggondozásnál van létalapja az individualizált foglalkoztatásnak.

Az új didaktikai kutatások ezeket a munkaformákat a kooperatív tanulás kategóriájába sorolják. Ezek szerint a kooperatív tanulás a résztvevők együttműködésén alapuló kiscsoportos tevékenység, amely a különböző célok elérésére szerveződhet, segítheti az egyes tanulók tanulmányi fejlődését, illetve hozzájárulhat az együttműködéshez szükséges képességek és készségek kialakulásához, a reális önértékelés és a problémamegoldó gondolkodás fejlesztéséhez.

Módszerek

A tanítási-tanulási folyamat módszerei Dr. Nagy Sándor szerint az egyes didaktikai feladatok realizálását biztosító speciális eljárások. Ennek alapján mondhatjuk, hogy az oktatási módszer az oktatás célja és tartalma által meghatározott ismeretnyújtó és ismeretszerző tevékenységnek olyan sajátos formája, amelyet a tanár tudatosan és tervszerűen választ meg az oktatási folyamatban egy-egy didaktikai feladat optimális megoldására. Ilyenformán iskolai munkánkban módszerként említhető speciális eljárások sokaságát tudjuk megkülönböztetni. Csak felsorolásszerűen közlünk néhányat.

A tanár eljárásai lehetnek:

- a szükséges ismeretek szóbeli közlése,
- beszélgetés a tanulókkal,
- a tanulók munkájának kérdésekkel, utasításokkal való irányítása,
- manipulatív tevékenységek,
- demonstrációs kísérletek bemutatása, a kísérletek elemzése,
- a kísérletek, a tanulói cselekvések tapasztalatainak megvitatása, a tanulói viták irányítása, stb.

A tanulók részéről olyan munkaeljárások jöhetnek szóba, mint az önálló ismeretfeldolgozás segédanyagok felhasználásával, megfigyelések, kísérletek elvégzése, ezek elemzése, beszámolók, referendumok készítése stb. Valójában az ismeretszerzés fázisai határozzák meg, hogy mikor, milyen módszert alkalmazunk. Egészen más szükséges az új ismeretek szerzésének kezdetén, mint az ismeretek alkalmazásának, vagy rendszerezésének, rögzítésének szakaszában.

A megfelelő módszerek megválasztását befolyásoló tényezők:

- megvalósítandó nevelési, oktatási, képzési célok,
 - a tananyag tartalma,
 - a tantárgyak eltérő sajátossága,
 - a didaktikai feladatok,
 - a tanulók életkori sajátosságai,
 - a tanulók fejlettsége, képzettsége, képességei,
 - a tanulók érdeklődési köre,
 - a pedagógus személyisége
- stb.

A feltételek, az elvárások és a tényezők sokszínűségéből következik, hogy egy adott osztályközösségben – bármilyen munkaformában is végezzük az oktatást – a módszerek sokaságát kell segítségül hívnunk ahhoz, hogy oktató-nevelő munkánk hatékony legyen.

Az előbb említett módszertani „sokaságot” próbáljuk meg rendszerezni!

A módszerek csoportosítása

1. A tanári szereplés módszerei

Az oktatási gyakorlat során többféle változat alakult ki. Ilyenek például az előadás, a felolvasás, a magyarázat stb. Mindegyikre jellemző a hosszabb-rövidebb szóbeli ismeretközlés a tanár részéről.

Nem ok nélkül nevezték ezt a módszert régebben akroamatikus módszernek. (Az akroamatikosz görög szó, amelynek jelentése „meghallgatásra szánt”.)

Éppen ez az értelmezés az, ami megmutatja a tanári előadás módszerének minden hátrányát. Ennek a módszernek a kizárólagos, vagy túlzásba vitt alkalmazása a tanulót passzív befogadásra készíti, és ennek a passzív befogadásnak az eredménye erősen megkérdőjelezhető. Ezzel a módszerrel megsértjük a matematikatanítás Pólya-féle alapelveit (nincs felfedezés, nincs megértés, nincs problémamegoldás – nincs aktív tanulás) és figyelmen kívül hagyjuk Skenpnek az ismeretszerzés fázisairól alkotott téziseit. (Mindkét elméletet részletesen elemeztük a Kompetenciaalapú matematikaoktatás című elektronikus jegyzetünkben. (TÁMOP 4.1.2.-08/1/A-2009-0038, Eger)

Ezen hiányosságokon túl, még az is hátrányként jelentkezik, hogy a tanuló látszólag nagyon figyel, de közben gondolatai egészen máshol járnak, azaz a tanár által

mondottakat meg sem érti, át sem gondolja, fel sem fogja. Ehhez negatív tényezőként még az is hozzájárul, hogy a tanulók a legérdekesebb előadásra sem képesek 5-10 percnél hosszabb ideig koncentrálni.

Minden tanár tudja, hogy a tanári közlés, az elbeszélés, a magyarázat nem küszöbölhető ki teljesen a tanítási-tanulási folyamatból, de törekedni kell arra, hogy ezek az „előadások” rövidek, 5-10 percnél ne legyenek hosszabbak, tömörek, érdekesek, figyelemkeltők, lényegkiemelők legyenek. Célszerű a rövid ismertetés után egy visszajelzést kérni a tanulóktól, amelyben a hallottak lényegére kérdezzük rá.

Az eddig mondottakból következik, hogy nem tartjuk jónak – sőt inkább kerülendőnek tartjuk – azt az egyre inkább terjedő módszert (mind az általános iskola felső tagozatában, mind a középiskolában), hogy a tanár – a szűkös időkeretre hivatkozva – a táblára írva, vagy projektorral kivetítve mintegy levezeti, „leadja” a tananyagot, és a tanulók a füzetükbe másolva csak követik – ha követik – a tanár gondolatmenetét. Ezáltal egyetlen nevelési célt sem tudunk megvalósítani, és szakmailag sem gyarapodik a tanuló. Inkább kevesebbet tanítsunk, de azt alaposan, a pedagógiai, pszichológiai, módszertani alapelveket betartva tegyük.

2. *A tanár-diák párbeszéd*

Jellemzője a kérdés-válasz sorozatos ismétlődése. A tanár jól irányított kérdésekkel az ismeretek egy adott szintjéről egy magasabb szintre tudja eljuttatni a tanulókat. Célunk a tanuló aktivitásának biztosítása.

Fajtái:

- *Kérdve kifejtő:* hagyományos értelmezésében a tanár kis lépésekre bontja az elsajátítandó tananyagot, s a *tanulók* ezekre (s csak ezekre) válaszolva „*lineárisan*” *jutnak el az ismeretek egy magasabb szintjéig*. Nem ajánljuk ezt a módszert – legfeljebb a nagyon alacsony szinten lévő tanulók esetén, – mert a tanulók gondolkodását, fantáziáját, kreativitását nem fejleszti. (Sőt rendszeres alkalmazása elsorvasztja azt.)

A modernebb értelmezéshez átfogóbb, gondolkodtatóbb, lényegre szorítókozó kérdésekkel – és nem lineáris felépítéssel – a tanulók kreativitásának utat engedve már elfogadhatónak tartjuk ezt a módszert.

- *Katetikus*: jellemzője, hogy a tanuló *meglévő ismeretei* után „kutatunk” kérdéseinkkel, amikor a feladat megoldása során elakad a munkájában. (Például: két különböző nevezőjű törtet rosszul ad össze a tanuló. Kérdés: hogyan adunk össze két különböző nevezőjű törtet? Hogyan alakíthatjuk azonos nevezőjűvé a törteket? Mi lesz a közös nevező? Hogyan adunk össze két azonos nevezőjű törtet?)
Ennek a módszernek csekély a gondolkodást fejlesztő hatása. A kérdésekhez egyértelműen rendelhető hozzá a válasz. Csupán emlékezetbe idézésről és nem gondolkodásról van szó. Hiányosságai ellenére – főleg a gyengébb tanulók esetén – mégis szükséges az alkalmazása.
- *Heurisztikus*: jellemzője a *felfedeztetés*. Kérdéseinkkel úgy irányítjuk a tanulókat, hogy a szóban forgó ismeretre önmaguk jöjjenek rá, fedezzék fel azt. (Például a színesrúd használatával, néhány segítő kérdéssel a tanuló maga jön rá a törtek kétféle értelmezésére.) Az ismeretszerzés legjobb módszerének tartjuk.
- *Szókratészi dialógus*: a heurisztika mellett, vagy vele együtt a legértékesebb módszer. Mind a gondolkodás fejlesztésében, mind a problémamegoldásban, mind a fogalomalkotásban jól használható. A tanár *ellenpéldákkal* igyekszik rádöbenteni a tanulót ismereteinek fogyatékoságaira, míg végül a tanuló magát javítva, kiegészítve jut el az adott fogalomig, vagy a problémamegoldásig.

E két utóbbi módszernek legnagyobb hátránya az, hogy alkalmazásuk nagyon időigényes, de a ráfordított idő mind a tanulók gondolkodásában, mind a problémamegoldásában, az ismeretszerzésében megtérül. Tartósabb, alkalmazhatóbb, értékesebb ismereteket szerez a tanuló ezen módszerek által.

3. *Önálló tanulás módszere*

A tanuló tanári segítség nélkül tankönyvek, munkafüzetek, programok, számítógépek felhasználásával szerez új ismereteket, old meg új problémákat. Az önálló tanulásra rá kell nevelni a tanulókat. Ez a módszer önmagától nem alakul ki a tanulóknál.

A kompetenciaalapú matematikaoktatás fő törekvése az önálló tanulásra való képesség, az élethosszig tartó tanulásra való igény kialakítása.

Matematikaórákon célszerű mind a módszereket, mind a munkaformákat ötvözni, egy órán egy anyagrészt tanításánál minden mozzanathoz a megfelelő „kombinációt” kiválasztani.

A megfelelő munkaformák, módszerek megválasztása, mint korábban írtuk, többek között függ:

- a tanítandó tananyagtól,
- a tanulók képzettségétől, fejlettségétől,
- a tanár személyiségétől,
- az iskola felszereltségétől.

Például az a tanár, aki nem képes tartós figyelemmegosztásra, nem biztos, hogy eredményesen tudja alkalmazni a csoportmunkát, vagy az egyéni munkát. Ha a tanulók előképzettsége gyenge, önálló munkájuk eredménytelen lesz. Stb.

Ezután néhány olyan munkaforma-módszer „kombinációt” mutatunk be – a teljesség igénye nélkül – amelyeket matematikaórákon eredményesen használhatunk.

A frontális munkához elvben minden módszer alkalmazható, de a tanári előadást, mint írtuk óvatosan kell kezelni. Főleg új ismeretszerzésnél, és legfeljebb 5-10 perces előadások hatásosak, mert a 10-18 éves korosztály ennél többre tartósan *figyelni* nem képes. Történeti érdekességek, kialakulási módok, érdekes eljárások stb. képezhetik az előadások témáját.

Egyébként a frontális munkához bármelyik módszert is választjuk, eredményeink mindig hiányosak lesznek. Mint korábban is említettük, a tanulók közti különbség nem teszi lehetővé, hogy mindenki azonos ütemben haladjon, azonos ismereteket, azonos szinten sajátítson el. Ha a jóknak „magyarázunk”, akkor a gyengék nem tudják követni, ha a gyengéknek, a jók unatkoznak, ha a közepeseknek, akkor a gyengék és a jók is kárát látják. Bár eredményei is vannak ennek a munkaformának (logikai sorrend, elemzés, általánosítás stb.), mégis meggondolandó, hogy célszerű-e túlzásba vinni ennek alkalmazását.

A csoportmunkák közül a *heterogén csoportmunkát* szerencsésebb az „ismeretszerző” órán alkalmazni, ötvözve a heurisztikával és a szókratészi dialógussal. A tárgyi tevékenységek, a tapasztalatok gyűjtése során, a sejtések megfogalmazásában a jobb

képességű tanulók tudnak segíteni a gyengébbeknek, s mivel minden csoport azonos erősségű, típusú „mintapéldán” dolgozik, így a szerzett tapasztalatok száma lényegesen nagyobb, mintha pusztán tanári demonstrációval nyerték volna a tapasztalatokat. (Adott tulajdonságú pontthalmazok – többféle alakzat; kombinatorika, valószínűség – a kísérletek más-más elemszámmal az egyes csoportokban stb.)

A *homogén csoportmunka* a szókratészi dialógussal és a katetikus módszerrel ötvözve lehetővé teszi a differenciálást. Főleg *gyakorlóórákon célszerű használni*, amikor a tanulók teljesítményei közti különbségek jelentkeznek. A gyenge képességű tanulók csoportjának egyszerű, bevésést és elmélyítést segítő feladatokat adunk, míg a jobb képességűeknek ugyanebből a témakörből bonyolultabb, problémaszituációt magába foglaló feladatokat. A tanári segítség szükség esetén a gyenge csoportnál a hiányok pótlására irányuló kérdésekben, az erősebb csoportnál a hibák, a félreértések kérdésekkel történő feltárásában realizálódik.

Az ismétlő, rendszerező órákon a frontális munka szókratészi dialógussal, katetikus módszerrel, vagy heterogén csoportmunka ugyanezekkel a módszerekkel jól használható, hiszen itt ki kell emelni az adott témakör legfontosabb részeit, meg kell mutatni a gyakorlati alkalmazhatóságot, a más fogalmakkal való kapcsolatot. Ez minden tanulónak szükséges, így itt nem szerencsés a differenciálás.

Kulcsszavak

munkaforma

frontális osztálymunka

csoportmunka

individualizált munka

oktatási módszer

tanári előadás

önálló tanulás módszerei

tanár-diák dialógus

heurisztika

szokrateszi dialógus

katetikus

kérdve kifejtő

Kérdések, feladatok:

1. Egy önállóan választott témakör tanításához készítsen óratervezetet, amelyben a heterogén csoportmunkában valósítja meg az új ismeretszerzést!
2. Tervezzen meg egy gyakorlóórát, ahol a tanulók homogén csoportokban dolgoznak! (Önállóan választott témakör lehet az általános, vagy középiskolai tananyagból.)
3. Tervezze meg a tanulók önálló tanulását egy tetszőleges középiskolai témakör feldolgozásával!
4. Milyen oktatási munkaformákat ismerünk? Jellemezze azokat!
5. Milyen oktatási módszereket ismerünk? Jellemezze azokat!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Nagy Sándor: Didaktika
Tankönyvkiadó, Budapest, 1967

Ajánlott irodalom:

- Ács Pál szerkesztésében: A matematika tanítása, jegyzet
Tankönyvkiadó, Budapest, 1979
- Buzás László: Csoportmunka
Tankönyvkiadó, Budapest, 1988

IX. A differenciálás szükségessége és lehetőségei a matematikatanításban

Nívócsoportok, tehetséggondozás, felzárkóztatás

Oktatói-nevelői munkánkat évtizedekre, évszázadokra visszamenőleg olyan hatások érik, amelyek nemegyszer sokkolják a pedagógus társadalmat. Elég, ha a rendszerváltásokat követő ideológiai változásokat, az állandó tartalmi megújulást, s az állandóan változó – de nem feltétlenül javuló – gazdasági helyzetet említjük.

Ha ehhez még azt is hozzávesszük, hogy a tanulás társadalmi elismerése – hosszú évtizedek óta, s még ma is – kritikán aluli, s a tanulók magatartása, munkamorálja – talán a szülői

nevelőmunka hiánya, vagy gyenge hatásfoka miatt – sok kívánnivalót hagy maga után, láthatjuk, hogy a „sokkolás” kifejezés nem is túlzó megállapítás.

Mit tegyen (mit tehet) egy tanár, vagy egy iskola tanárközössége? Hogyan tanítsuk úgy a matematikát, hogy a tanulók a lehető legkevesebb energiával, a lehető legrövidebb idő alatt, a lehető legtöbb alkalmazásra képes ismeret birtokába jussanak, s közben – hiszen tanítva nevelünk és nevelve tanítunk – a legtöbb pozitív személyiségtulajdonság is kialakuljon bennünk?

A kérdés több szempontból is indokolt:

- A tanulók – az életkorhoz kötött – olyan nagyfokú teljesítménybeli különbséget árulnak el, amelyek már megkérdőjelezik az osztálykeretekben folyó munka hatékonyságát.
- Az otthoni szociális háttérben mutatkozó különbségek a tanulók képzettségében mutatkozó differenciálódás mértékét növelik.
- A tanulók képességében, akaratú tényezőiben, motiváltságában, érdeklődési körében stb. olyan nagy eltérések vannak, amelyek szintén gátló tényezői az osztályokban folyó tanításnak.

Mindezek a gondok az oktatással szembeni társadalmi elvárásokat nem csökkentik.

Adott a feladat. A meglévő pedagógustársadalommal, viszonylag kis anyagi többletköltséggel, a meglévő eszközparkkal, felszereltséggel kell elérnünk azt, hogy a korábban említett problémákat kiküszöböljük, vagy legalábbis az ismeretszerzésre kifejtett negatív hatásukat minimálisra csökkentjük. Erre egy lehetőség – de nem az egyetlen – a tanulók képesség, képzettség szerinti csoportokra bontása. A csoportbontás nem újkeletű dolog a pedagógiában. Többször „felkapták”, divatirányzat lett, majd elfeledték, s visszatértek a hagyományos osztálykeretekhez.

Ez a fejezet nem egy adott tanórán megvalósítható differenciálási lehetőségről szól, hanem egy olyan viszonylag állandó csoportbontásról, amelyben a közel azonos képességet mutató tanulók huzamosabb ideig (félév, év, esetleg több év) egy csoportban dolgoznak, biztosítva a tanulók zömének a megfelelő tananyagtartalmat, haladási ütemet, munkaformát, módszert, eszközt stb.

Többen Magyarországon – főleg a 2002-2009-es években – ezt a fajta szervezési módot azonosították az úgynevezett „szegregációval”. Kormányzati szinten próbáltak is ellene tenni, többek közt azzal, hogy a többszörösen hátrányos helyzetű tanulókat – integráció címen – beosztották más iskolák tanulói közé. Ez több problémát vetett fel. Egyrészt olyan

környezetbe kerültek a tanulók, amely számukra teljesen idegen volt minden téren. Másrészt saját kultúrájukból, saját környezetükből kivették őket, és beerőszakolták olyan osztályokba, ahol szinte törvényszerű volt az eredménytelenség, aminek következménye a tanulók iskolai oktatásból történő kirekesztődése. Mi inkább ez utóbbit tartjuk káros „antiszegregációnak”, vagy hamis „integrációnak”.

Ebben a fejezetben megmutatjuk az állandó csoportbontás előnyeit, hátrányait, illetve azt, hogy hogyan lehet tanulócsoportokat kialakítani, úgy, hogy minden tanuló optimálisan fejlődhessen.

Éppen a csoportok viszonylagos állandósága miatt nagyon körültekintően kell eljárunk a csoportok kialakításánál, valamint a csoportok további munkájának megszervezésénél.

Három fő területet kell elemeznünk. Ezek:

- a csoportbontás kritériumai,
- a megtanítás stratégiái a különböző csoportokban,
- az ellenőrzés, értékelés, osztályozás problematikája.

1. A csoportbontás kritériumai

Mint ezt korábban írtuk a kutatások – de a pedagógus személyes tapasztalatai is – egyértelműen igazolják, hogy csak az életkort figyelembe vevő, úgynevezett hagyományos osztályfoglalkoztató tanítás során nagyon sok probléma jelentkezik. A tanulók különböző időben, más-más tartóssággal és alkalmazhatósággal sajátítják el az ismereteket. Ennek az az oka, hogy azonos életkorú tanulók között a tanulás szempontjából nagy eltérések lehetnek. (Kis létszámú tanulócsoportokban ezek a problémák viszonylag könnyen kezelhetők.)

Melyek ezek a területek, és milyen összefüggések vannak?

- *Aktuális fejlettség*
 - előképzettség, készségek, jártasságok,
 - memóriabeli adottságok, gondolkodási képességek, kreativitás,
 - koncentrációs képességek, akaraterő, munkabírás.

E területet vizsgálva arról kaphatunk információkat, hogy tanulóink a korábbi ismeretekből mennyit őriztek meg, melyek váltak ezek közül belsővé, melyiket milyen szinten tudják alkalmazni, mennyi ideig, milyen szintig képesek egy adott

feladat megoldásában elmélyedni, milyen kapcsolatokat képesek felidézni, vagy alkotni régebbi ismereteik felhasználásával.

- *Tanulási adottságok*
 - a tanulás sebessége,
 - a tanulás intenzitása,
 - tanulási módszerek,
 - motiváltság, akarat tényezők.

Vannak gyorsan és lényegre törően tanuló gyerekek, s vannak olyanok is, akik lassan tanulnak, akiknek a gondolatai nagyon rövid idő után „elkalandoznak”, nem képesek az intenzív munkára. Sok gyerek csak erős tanári irányítással képes új fogalmak kialakítására, mások erre önállóan, esetleg kis segítséggel, iránymutatással is képesek. Egyeseket a tantárgy tartalmi vonatkozásai (például egy-egy érdekesebb feladat, tétel, bizonyítás stb.) motiválnak, másokat még szülői, nevelői erősebb ráhatás sem. Nagyon különböznek a tanulók a megfigyelőképesség, a leleményesség, az előrelátás, a képzelet, az ítélőképesség területén is. Mindezek mutatják, hogy minden tanulónál az ismeretszerzésnek egy sajátos útja valósul meg, s az ideális az lenne, ha a tanulóknál ezt figyelembe is tudnánk venni, s munkánkat ennek megfelelően tervezni.

- *Otthoni tanulás*
 - a tanulás intenzitása,
 - a szülők igény szintje,
 - motiváltság, akarat tényező,
 - szociális háttér,
 - a szülők iskolázottsága,
 - a szülők segítőkészsége.

A mai iskolarendszerünk erősen támaszkodik az otthoni tanulásra. Gondoljunk arra, hogy egy tanórán egy tanuló hány hasznos percet tölt el (amikor kizárólag csak a matematikával foglalkozik), és otthon hány percet kell neki a házi feladat elkészítésével, illetve az elméleti anyag megtanulásával eltölteni.

Ily módon az otthoni tanulás – és az erre való lehetőség – meghatározó tényezője a matematikai ismeretsajátítási folyamatnak.

Sok tanuló „látszattanulást” folytat. Ül a könyv mellett, de munkájának hatékonysága, intenzitása nagyon gyenge.

A szülők igény szintje és a motiváció erősen összefügg. Ha a szülők érdeklődnek gyermekük iskolai munkájáról, a tanuló érzi munkájának fontosságát, jobban odafigyel, igyekszik feladatait legjobb tudása szerint megoldani. A szülők iskolázottsága annyiban fontos, hogy milyen mértékig képesek gyermeküknek a szükséges segítséget megadni, s hogyan serkentik őt jobb munkára.

Az otthoni tanulás feltételei közül – beleértve a szülői segítséget, a saját szobát, a nyugodt családi légkört – döntő a szociális háttér. Ez segíti át a tanulót a nehézségeken, segít megoldani a konfliktusokat, oldani a feszültséget. Jó szociális háttérrel – ami nem csak anyagi javakat jelent, sőt – a tanuló kiegyensúlyozottabb, aktívabban tud részt venni a munkában, s az esetleges hiányosságok is könnyebben pótolhatók szülői segítséggel. Ez az akarati tényezőkre is pozitív hatással van.

E három terület mindegyikét – valamilyen súllyal – figyelembe kell venni a csoportbontásnál.

Kérdés, hogyan állapítható meg egy tanuló „szintje” az egyes területeken, s mely tanulók sorolhatók egyazon csoportba.

Az aktuális fejlettséget viszonylag könnyű mérni. Néhány jól tervezett teszt választ adhat arra, hogy az előképzettség, a memória, a koncentráció területén milyen szinten vannak a tanulók.

Például, ha a csoportbontást 5. osztályos tanulóknál kívánjuk megvalósítani, akkor javasoljuk, hogy 4. osztály végén több olyan tesztet írassunk meg a tanulókkal, amelyekben az alábbi területeket tudjuk feltérképezni:

- számfogalom, műveletfogalom, műveleti tulajdonságok,
- mértékváltás, mértékegységek,
- szövegértelmezés, szövegelemzés,
- egyszerű következtetési sémák,
- elemi térszemlélet,
- manipulatív tevékenységre való képesség,
- szaknyelv pontos használata (a tanulók szintjének megfelelően),
- szóbeli és írásbeli számolási rutinok.

(Mindegyikről részletes elemzés olvasható a Kompetenciaalapú matematikaoktatás című elektronikus jegyzetünkben. (TÁMOP 4.1.2.-08/1/A-2009-0038, Eger)

Néhány gondolat a fenti területek némelyikéhez:

A számolási készséget azért tartjuk fontosnak, mert e nélkül nincs matematikai tevékenység. Hiába tudna egy adott problémát megoldani a tanuló, ha a megoldáshoz szükséges eszköz hiányzik a kelléktárból. A számfogalom bővítéséhez, a racionális számok fogalmának kialakításához is nélkülözhetetlenek ezek az ismeretek.

A szövegértelmezés, a szövegértés, a tanulók értelmes gondolkodásának minőségét mutatja: képesek-e a tanulók a lényeges jegyeket a lényegtelenről elválasztani, az adatok közti kapcsolatokat feltárni. Ha ezekkel a tulajdonságokkal rendelkeznek a tanulók, akkor az esetleges többi hiányosság viszonylag könnyen pótolható.

A számok olvasása, a manipulatív tevékenységre való képesség beszélgetés, megfigyelés alapján mérhető.

Lényegesen nehezebb hasznos információkat szerezni a tanulási adottságokról, és az otthoni munka lehetőségeiről, hatékonyságáról. Itt szintén a folyamatos megfigyelés, valamint a környezettanulmány lehet segítségünkre. (Nem dönthető el egy teszttel, hogy a tanulói hiányosságnak mennyiben okozója ez a két terület.) Ennél fogva ezekről a területekről szerzett információk kevésbé objektívek, mint az aktuális fejlettségről szerettek. A tanulókról készített folyamatos feljegyzés elemzésével csökkenthető a szubjektivitás, s nagy valószínűséggel eldönthető, hogy egy adott tanuló jó, közepes, vagy gyenge kategóriába tartozik. (Ehhez feltétlenül szükséges az alsó tagozatos nevelőkkel történő folyamatos konzultáció.)

2. Tanítási stratégiák az egyes csoportokban

– Tartalmi vonatkozások

A jelenlegi tantervi követelmények egységesek. A problémák gyökere éppen abban van, hogy a mai iskola nem képes megbirkózni a tanulók közötti különbségekkel, holott a társadalom mai fejlettsége és fejlődése minden ép polgárától olyan intellektuális, és olyan magatartásbeli fejlettséget követel meg a társadalmi beilleszkedés elemi feltételeként, amit a tanulóknak csak kis hányada tud produkálni.

Az 1988-tól érvényben lévő, majd azóta többször átdolgozott, Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében megjelent tankönyvek, és kiegészítő tanulói, valamint tanári

segédanyagok szerzői – az itt említett hiányosságok kiküszöbölésére – úgy állították össze a tananyagot, a követelményeket, hogy minden iskolatípusban, minden tanári munkaközösség adaptálni tudja azt saját iskolája számára.

Egy – a későbbiekben, az ellenőrzésnél taglalt – veszélyre hívjuk fel a figyelmet. A dokumentumcsaládban javasolt követelményszintek nem azt jelentik (nem szabad, hogy azt jelentsék), hogy a gyenge tanulóknak csak a minimum szintnek megfelelő tananyagot tanítjuk, hanem lehetőség szerint a közepeseknek és a jobbaknak valóban annyit, – a legtöbbet – amennyit a tanulók fel tudnak dolgozni.

Ezt úgy célszerű megvalósítani, hogy több anyagrészt a gyenge csoportnál csak érintünk, előkészítünk, alapozunk, míg a többi csoportnál esetleg „készre tanítjuk”, s problémaszituációkba ágyazva szereztetjük az újabb ismereteket. (Ehhez nagy segítség a tankönyvekben a feladatok számozása mellett található különböző jelek valamelyike, a feladatok fontosságára, illetve nehézségére utalva velük.)

Összefoglalva: tartalomban az egyes csoportoknál úgy jelentkezik a differenciálás, hogy minden csoportban minden törzsanyagot tanítunk, csak az anyag mélysége, az elsajátítás minősége különbözik. Egyiknél megállunk (mert nem juthatunk tovább) az egyszerű alkalmazás szintjén, míg a másikonál az alkotó alkalmazást kívánjuk meg, s tanítjuk a kiegészítő tananyagot is.

– *Munkaformák, módszerek, eszközök*

A „jó csoport” a tanulási sebességben, a memóriabeli adottságokban, a koncentráció képességekben legalább közepes szintű. Ez lehetővé teszi a *nagyobb önállóságot, a gyorsabb haladási ütemet, az önellenőrzést, az önértékelést.*

Az ismeretszerzés folyamatában ez azt jelenti, hogy kevés frontális munkára, sok csoport-, és még több individualizált munkára van szükség.

A módszereket illetően domináns a heurisztika, a szókratészi dialógus, és a viszonylag kevés eszközhasználat

Az egész ismeretszerzés az önálló tanulás irányába tolódik el – jól megtervezett tanári irányítással.

A „gyengébb csoport” tanulói, az előbb mondottak alapján, inkább rászorulnak a tanári segítségre. Munkaformákban döntő a *frontális munka, a csoportmunka, módszerekben, pedig a fokozott eszközhasználathoz kapcsolt heurisztika.* Ebből,

pedig következik a lassú haladási ütem, s a begyakoroltató feladatok (egyszerű alkalmazás) túlsúlya.

Valószínűleg ennél a csoportnál lesz gond az otthoni munkával is, így ezeknek a tanulóknak nagyobb szüksége van a *napközi otthonos, tanulószobai foglalkozásokra*, illetve *korrepetálásokra*, továbbá a *házi feladatok alapos megbeszélésére*.

Az is sokat segítené ezeken a tanulókon, ha hetente legalább egy matematikaórával több lenne nekik, mint a másik csoportnak. (Erre a NAT, illetve a Kerettantervek lehetőséget adnak.)

3. Egységes ellenőrzés, értékelés, osztályzás az egyes csoportokban

A csoportbontás egyik legsarkalatosabb problémája a tanulók teljesítményének objektív mérése, értékelése. Hogyan lehet elkerülni azt, hogy a tanár szubjektív benyomása ne tükröződjön a jegyekben? (Konkrétan: hogyan tudjuk elérni, hogy egy közepes érdemjegy ugyanazt a teljesítményt jelentse a jó csoportban, mint a gyengében, s ne befolyásoljon bennünket a csoport többi tagjához való viszonyítás?)

Minden tanulónak – legyen bármely csoportban – azonos erősségű mérőlappal, azonos körülmények között kell számot adni tudásáról.

Egy ilyen mérőlappal szemben támasztott követelmény:

- fokozatosan nehezedő feladatokat tartalmazzon,
- minden törzsanyagnak megfelelő témakör szerepeljen benne,
- az egyes témakörök részegységeinek mindegyike legyen abban megtalálható.

(Ezeket az alapelveket részletesen elemezzük egy későbbi fejezetben.)

Itt utalunk vissza a korábban írtakra. Azért fontos a gyenge csoportnak is minden törzsanyagot tanítani, mert különben egy ilyen témazáró dolgozatnál már rögtön behozhatatlan hátránnyal indulnának. (Ugyanis olyan ismeretek szerepelnének a mérőlapban, amit esetleg a gyenge csoportban nem is tanítottunk.)

Az olyan mérőlap tervezése, amely az itt írt követelményeknek megfelelő, nagyon körültekintő munkát igényel a pedagógustól, vagy a munkaközösségtől. (Ezt részletesen az ellenőrzés, értékelés, osztályzás című fejezetben fejtjük ki.)

Sok pedagógus nem helyesli az ilyen típusú csoportbontást. Főleg azok nem, akik a gyengébb csoportokat tanítják, hiszen itt kevesebb – legalábbis látszólag – a sikerélmény, több a munka, a tanítás nagyobb energia-befektetést igényel a tanártól, mint a jó csoporttal való foglalkozás.

A szülők is idegenkednek attól, hogy gyermeküket a gyengébb csoportba járassák. Körültekintő szervezéssel, megfelelő tájékoztatással e két problémán könnyen segíthetünk.

A pedagógusok között arányosan kell elosztani az osztályokat. Amennyiben nincsenek párhuzamos osztályok, nem lehetséges az arányos elosztás, akkor biztosítani kell, hogy meghatározott időn belül minden matematikatanár taníthasson jó csoportban is, gyenge csoportban is.

A szülők idegenkedése úgy kerülhető el, hogy ismertetjük a szülőkkel a csoportbontás kritériumait, feltárjuk a problémákat, s megmutatjuk, hogy a gyengébb csoportban olyan munkaformákat, módszereket, eszközöket alkalmazunk, amivel a gyengébb gyerekek is biztosíthatjuk a minimum követelmények elsajátítását. Tehát nem a tanulók ellen, hanem éppen a tanulókért történik a csoportbontás.

Összefoglalva: alapos, feltáró, elemző munkával kialakíthatunk olyan csoportokat, amelyekben közel azonos képességű, adottságú gyerekek vannak. Megfelelő tervező munkával elérhetjük azt, hogy minden tanuló a számára legmegfelelőbb ütemben haladjon, az általa megtanulható maximumot tanulja olyan munkaformában, és olyan módszerrel, ami egyéniségének leginkább megfelel. Így tudjuk biztosítani legeredményesebben minden ember személyiségének optimális fejlődését, egyéni sajátosságainak, képességeinek kibontakoztatását.

4. Nívócsoportok szervezési kérdései

Ebben a fejezetben is a csoportbontás problematikájáról szólunk, de a csoportbontás céljai, kritériumai egészen mások, mint a képesség, a képzettség szerinti csoportbontásnál. Az alap- és a középfokú iskolarendszer nagyon változatos. A hagyományos 8 + 4-es képzési forma mellett megtalálható a 4 + 8 (nyolcosztályos gimnázium), a 6 + 6 (hatosztályos gimnázium) a 6 + 4 + 2 (a hatosztályos gimnázium az utolsó két évben speciális szakirányú képzéssel) is. Az iskolarendszer ilyen átalakulása, illetve a tanulók erre való felkészítése nagy feladatot, s még nagyobb felelősséget jelent a 6-14 éves korosztály tanítók számára. Egy 10 éves gyerek előtt a következő lehetőségek vannak:

- Valamelyik 8 osztályos gimnáziumban tanul tovább, vagy marad eredeti iskolájában.
- 12 éves korban (a 6. osztály elvégzése után) ismét választhat. 6 osztályos gimnáziumban folytatja tovább tanulmányait, vagy marad.
- 14 éves korban (a 8. évfolyam elvégzése után) ismét van két lehetőség. Vagy a hagyományos (4 osztályos) középfokú képzésben vesz részt, vagy szakiskolába mehet (3 éves) a tanuló. (A szakképzésben jelentős változások mennek végbe.)

A választási lehetőséget nagymértékben befolyásolja a tanulók tanulmányi előmenetele, szociális helyzete, a település földrajzi adottsága, tehát a választás erősen korlátozott. Az alapképzésben résztvevő pedagógusoknak komoly problémákkal kell megküzdeniük:

- a különböző iskolatípusokban tovább tanulókat fel kell készíteni a más (vagy magasabb, középfokú) iskolában való tanulásra,
- figyelembe kell venni a tanulók irányultságát,
- a tovább nem tanulókkal a legszükségesebb alapismereteket el kell sajátítani, és mivel a 9-10. osztály is kötelező, vagy eddigi iskolájában, vagy máshol tovább kell az alaptárgyakat tanulnia.

Mindezek megvalósítása osztálykeretekben nagyon nehéz. Eredményre igazán ott számíthatunk, ahol meg tudják valósítani a csoportbontást.

Mint a bevetőben említettük, az ilyen fajta csoportbontásnak csak egyik feltétele a képzettség, képesség. A 10 éves tanulók irányultsága még nagyon gyenge, nem tudjuk eldönteni, hogy kiből mi lesz, a tanulók minden irányban változhatnak, így azt sem tudják megmondani, hogy ki, milyen iskolatípust válasszon, ki, milyen speciális képzésben vegyen részt. Ezért – mint korábban írtuk – az irányultságot célszerű figyelmen kívül hagyni, és az aktuális fejlettség – a tanulói adottság – az otthoni munka alapján csoportokra bontani az osztályt – biztosítva a csoportok közötti átjárhatóságot.

A 13-14 éves korosztály esetében már bátrabban nyúlhatunk a nívócsoportok kialakításához. Ekkor a tanulók elképzelései már szilárdabb jövőjüket illetően, a szülők is felmérték gyermekük továbbhaladási esélyeit, s a tanuló is többet tud saját magáról, mint két évvel korábban.

Mindez nem azt jelenti, hogy ekkor egyértelműen eldönthetjük, hogy milyen irányban való haladás a legmegfelelőbb a tanulónak, hanem azt, hogy ekkor kevesebbet tévedhetünk, s a tévedésünk is egyszerűbben korrigálható, mint korábban.

- *A nívócsoportok kialakításának szempontjai*
 - a tanulók teljesítménye,
 - a tanulók képességei, készségei,
 - a tanulók érdeklődési köre, irányultsága,
 - a tanulók akarati tényezője, motiváltsága,
 - a szülők igénye.

A tanulók továbbtanulási lehetőségét az első három szempont döntően befolyásolja, így a csoportok kialakításánál is ezt kell figyelembe venni.

Ha 5-6. évfolyamon a képzettség szerinti csoportbontást megvalósítottuk, akkor 7-8. évfolyamon viszonylag könnyű dolgunk van, hiszen a csoportokat az érdeklődési kör és az irányultság figyelembevételével esetleg csak finomítanunk kell, míg ha ez nem volt meg, akkor meg kell szerveznünk a csoportokat, ami – a korábbihoz hasonlóan – nagy körültekintést igényel.

- *A csoportok szervezésének gyakorlati megvalósítása*

6. osztály kezdetén szülői értekezleten tájékoztatjuk a szülőket a lehetőségekről, s nyilatkozatot kérünk tőlük a gyermekük továbbhaladási igényét illetően. Ugyanakkor tájékoztatjuk őket arról, hogy a csoportbontás kritériumai egy háromfordulós „verseny”, melynek írásbeli és szóbeli része is lesz. Bizonyos eredmények fölött a tanulók a jobb csoportba (szerencsésebb esetben nagyobb tanulói létszámnál a jobb csoportokba) kerülnek, a többiek a gyengébbe. Félévenként felmérjük a csoportok matematikai teljesítményét, és ennek alapján áthelyezhetünk tanulókat a másik csoportba. Ezzel a szülő felelősségét is növeljük, hiszen, ha szeretné, hogy gyermeke továbbhaladási esélye jó legyen, ösztönöznie kell őt a jobb munkára.

A háromfordulós írásbeli felmérést 6. osztály végén célszerű megírni. A lapok feladatanyaga fokozatosan legyen egyre nehezebb. (Az alapismeretektől az optimum szintig mindenfajta feladat megtalálható benne.)

Főbb területek:

- számfogalom,
- műveletek,
- egyenletek, egyenlőtlenségek,
- szöveges feladatok, arány, arányosság,
- számelmélet, oszthatóság,

- mértékváltás,
 - területszámítás,
 - tengelyes tükrözés.
- *Tanítási-tanulási stratégiák az egyes csoportokban*
- A folyamatos tananyag mellett figyelembe vesszük, hogy az adott csoport tanulói hol folytatják tanulmányaikat. Minden csoportnál minden szükséges ismeretet tanítunk (tehát a gyenge csoportnál legfeljebb a kiegészítő anyag marad ki), de a követelményekben már erősen differenciálni kell.
- A gimnáziumban, vagy a szakközépiskolában továbbtanulóknál az elemi szintnél lényegesen magasabb szintű ismereteket kell tanítanunk, több nehezebb probléma, tétel, bizonyítás, konstrukció szerepel a feladatok között. A szakiskolákban az alapkészségekre (számolás, mérés, mértékváltás, alapszintű geometriai szerkesztések), illetve ezeket az ismereteket nem sokkal meghaladó problémamegoldásokra helyeződik a hangsúly, míg a középfokú oktatásba nem jelentkező tanulók esetében (ezek a tanulók többnyire nagyon gyenge előképzettségűek, alulmotiváltak, érdektelenségből fakadóan legtöbbször fegyelmezetlenek – a már említett 9-10. osztályban tanulnak – az alapkészségeket, a társadalmi beilleszkedéshez legszükségesebb ismereteket tanítjuk.
- A választott munkaforma, módszer is igazodik a tanulók szintjéhez. A jó csoportban az önálló munka, kevés tanári közlés, kevés eszközhasználat csoportmunkában, vagy egyéni munka lesz a domináns, míg a gyenge csoportban lassú haladási ütem, sok tanári segítség, egyszerű begyakoroltató jellegű feladatok túlsúlya, kevés önálló munka, fokozott eszközhasználat frontális, esetleg csoportmunkában lesz a döntő.
- Minden csoportnál a pedagógus legfontosabb feladata az, hogy a tanulókat képességeikhez mérten, a lehető legmagasabb szintre juttassa el, függetlenül attól, hogy milyen csoportba kerülnek.

Végül összegzésként nézzük a nívócsoportok előnyeit:

- a választott iskolatípusoknak megfelelő, illetve szükséges tananyagot alaposabban tudjuk gyakoroltatni,
- a közel azonos érdeklődés és tudásszint miatt a haladási ütem gyorsabb, a feladatok szintje azonos,
- a tanárnak nem kell differenciálnia, könnyebb egy ilyen órára felkészülni,

- a tanulók jobban tudják egymás gondolatmenetét követni, jobban tudnak egymásnak segíteni,
- kialakul a tanulóknak a versenyszellem,
- a felvételikén nagyobb eséllyel indulnak az ilyen csoportban tanuló gyerekek.

A gyengébb csoportban is hasonló előnyöket tudunk felmutatni (érdeklődés, tudásszint, differenciálás, haladási ütem stb.).

Kulcsszavak

csoportbontás

aktuális fejlettség

tanulási adottságok

otthoni tanulás

szegregáció

tanítási-tanulási stratégiák

nívócsoportok

Kérdések, feladatok:

1. Ismertesse a differenciálás szükségességének és lehetőségének feltételeit és módjait!
2. Mik a csoportbontás kritériumai?
3. Milyen tanítási stratégiák valósíthatók meg a különböző csoportokban?
4. Ismertesse a nívócsoportok szervezési kérdéseinek szempontjait!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czegléd István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika tankönyvek 1-12. osztály számára
Műszaki Kiadó, Budapest, 2002-2010

Ajánlott irodalom:

- Kelemen László: Pedagógiai pszichológia
Tankönyvkiadó, Budapest, 1981
- Nagy József: A megtanítási stratégia elméleti alapjai
Tankönyvkiadó, Budapest, 1984

X. Tehetségfejlesztés és tehetséggondozás az iskolai matematikaoktatásban

A tehetség fogalmi megközelítése

A társadalmak rendszerint a legkönnyebben felismerhető tulajdonságok szerint tesznek különbséget az emberek között. Ez okozhatja, hogy a gazdasági szint és az etnikai háttér, az átlagtól eltérő – akár intellektuális, akár fizikai – teljesítmény mindig is fontos szerepet játszik történelmünkben, így többek között a nevelésben is. A pszichológiai és nevelési szempontból legfontosabb különbségek azonban nem mindig tartoznak a legkönnyebben felismerhető jegyek közé. A tehetség nem olyan egzakt tulajdonság, hogy az egyén pontosan meghatározható jellemzője legyen.

A tehetség lehetőség az egyénben, amely a külső és belső tényezők interakciójában jön létre. A tehetség, viselkedés és attitűd, értékrendszer és önértékelés. A tehetséges az egyén gondolkodásmódjában és ennek következtében a világgal való kapcsolatában tér el az átlagostól.

A tehetség, a többi képességekhez hasonlóan, különböző szinten jelenhet meg. Éppen ez a sokféle megjelenési mód kínál lehetőséget a tehetség változatos fogalomértelmezésére, s modellálására egyaránt.

Egyes kutatók a tehetséget az intelligenciával azonosítják, illetve a kivételes válaszok előfordulásának gyakoriságával, ritkaságával jellemzik.

Más kutatók is a magas intelligenciával vélik azonosítani a tehetséget, s az intelligencia és a tehetség személyben rejlő lényegét az absztrakciós, logikai és ítéletalkotási képességekben látják. Ugyanakkor az is kiderül, hogy nem a legintelligensebb gyerekekből lesznek a legnagyobb tudósok, hanem a környezeti tényezők, motivációjuk, kitartásuk és egyéb személyiségjegyeik is jelentősen befolyásolják további pályájukat. A kiváló képesség realizálása tehát jelentős mértékben a környezeti és személyiségfaktorokon múlik.

Ezen kutatások eredményeiből leszűrhetők, hogy a tehetségesek és a nem tehetségesek ugyanazokkal a képesség-, készségrendszerekkel rendelkeznek, de azok színvonalában, alkalmazási képességében térnek el egymástól. Ebben a rendszerben a környezeti tényezők nem hagyhatók figyelmen kívül.

A kutatások a tehetségnek széles skáláját sorolják fel. Néhány, ezen tehetségfajták közül:

- nyelvi,

- zenei,
- logikai-matematikai,
- téri,
- testi-kinesztetikus, (mozgásos jellegű),
- interperszonális, (személyiségek közötti),
- intraperszonális, (személyiségen belüli),
- stb.

Ezek az álláspontok hajlanak arra a megállapításra, hogy a tehetség a megfelelő támogató környezettel való interakció folytán alakul ki.

Találkozhatunk olyan kutatásokkal is, akik a tehetséget a csodagyerekkel azonosítják. Szerintük a tehetség már igen korai gyermekkorban megmutatkozik, s a későbbi élettapasztalatok sok esetben nem javítják, hanem éppen rontják a tényleges kibontakozás esélyeit.

A tehetség fogalmának kiterjesztése igényként fogalmazódik meg mind a pszichológiai kutatók, mind az iskolai gyakorlat képviselői, mind a technikai, műszaki világban dolgozók számára egyaránt. Szükségszerűvé válik egy olyan definíció, amit több-kevesebb sikerrel mindenki tud alkalmazni a maga területén.

Fejlődés-lélektani megközelítésből és az iskolai gyakorlat szemszögéből egyaránt elfogadottnak tekinthetjük a következő meghatározást:

Tehetséges gyerekeknek számítanak azok a gyerekek, akiknél a szakemberek valamilyen kimagasló adottságot, és olyan tényleges, vagy potenciális képességet állapítanak meg, amely révén rendkívüli teljesítmények megvalósítására alkalmasak, mégpedig egy vagy több területen.

Ezek a területek lehetnek:

- általános intellektuális képesség,
- specifikus tanulási (iskolai) képesség,
- kreatív gondolkodás,
- vezetői rátermettség,
- művészi adottságok,
- pszichomotoros képességek, stb.

Ezen értelmezés szerint tehetségesnek tekinthető az a gyermek is, aki csak egy területen mutat kiemelkedő képességet, s más területen akár átlag alatti teljesítményt is nyújthat. A

közoktatásban résztvevő tanulók többsége ilyen. Így mi ezt az értelmezést tartjuk alapnak a matematikai tehetségek vizsgálatánál is.

Tehetségnevelés matematikából tanórai keretekben és tanórán kívül

A matematikai tehetség

Amint az előző részben olvashattuk, nagyon sok kutató nagyon sokféleképpen értelmezi a tehetséget, ami a fogalom összetettségét mutatja. Mi most szorítkozunk a közoktatásban résztvevő tanulókra! Vizsgáljuk meg, hogy mi jellemzi a tehetséges tanulót, miben tér el a kevésbé tehetséges társaitól, milyen cselekvési, tevékenységi, gondolkodási mód jellemzi iskolai és iskolán kívüli munkáját!

A korábban tapasztalt különböző értelmezésekből, felfogásokból egyértelműen kiderül, hogy a tehetséges tanuló másképpen gondolkodik, más cselekvési tervet készít, másképpen értékkel, más összefüggéseket keres stb., mint átlagos (kevésbé tehetséges) társai. Azt is megfigyelhetjük a tehetségkutatásoknál, hogy a matematika, illetve a matematikai gondolkodás a legtöbb értelmezésében külön területként jelenik meg. A matematikában tehetséges emberekre csodálkozva tekint az átlagember, mert számára szinte felfoghatatlan dologban rendelkezik naprakész, alkalmazható ismeretekkel.

Sokak számára külön világ a matematika, ami érthetetlen, megközelíthetetlen számukra. Ez nagy valószínűséggel annak is köszönhető, hogy a matematikatanulás, az ismeretszerzés folyamatába hiba csúszott. Ez a hiba lehet szakmai (az egymásra építettség, fokozatosság hiánya), vagy didaktikai (sérülnek a tanítás-tanulás alapelvei). Sokszor a tanár személyisége is negatív hatással van a matematikai képességek kialakulására. Ugyanez igaz más tantárgyakra is.

A helyzetet még az is bonyolítja, hogy a matematika különböző területeinek elsajátítása emberenként változó. Van olyan, aki maradandót alkot a számelméletben (ezen a területen tehetséges), de geometriából, vagy valószínűség-számításból csak átlagos teljesítményt produkál.

Ha tömören szeretnénk válaszolni arra, hogy ki a matematikai tehetség, talán azt a választ adhatnánk, nem az, aki a definíciókat, tételeket, algoritmusokat hiánymentesen, pontosan felsorolja, hanem az, aki ezen ismeretek birtokában problémamegoldásra, alkalmazásra, újat-alkotásra képes. Ez bizonyos matematikai képességek, készségek meglétét feltételezi.

Ilyen képességek, készségek lehetnek:

- gondolkodás, következtetés,
- érvelés,
- kommunikáció,
- modellezés,
- a feladat megfogalmazása, megoldása,
- ábrázolás, ábrák értelmezése,
- szimbólumok, műveletek helyes használata,
- eszközhasználat.

Viszont ezek a képességek, készségek szükségesek, de nem elégségesek ahhoz, hogy valakit matematikai tehetségnek tartsunk. Ezeken túl még sok összetevőt találunk.

Elengedhetetlen a kognitív képességek fejlettsége (általános értelmi képesség, mentális képesség), fejlett kreatív személyiségtulajdonságok (problémaérzékenység, eredetiség, ötletgazdagság stb.), jó személyiségjellemzők (motivációs tényezők) és megfelelő külső feltételek (életkor, szociokulturális háttér stb.) megléte is. Továbbá ha nem elég fejlettek, vagy hiányosak a tanulók gondolkodási műveletei, az nagymértékben csökkenti a matematikai képességek kialakulását, és ezáltal a tehetség kibontakozását.

Az eddig mondottakból is kiderül, hogy a tehetség – ezen belül a matematikai, az irodalmi, a művészeti, a természettudományi stb. tehetség – nagyon összetett, sokrétű, sok minden által befolyásolt, determinált, sok mindentől függő személyiségtulajdonság.

A matematikai tehetség jellemzői

Mivel a fogalom nagyon összetett, joggal merül fel a kérdés: Hogyan ismerheti fel a tanár az osztályában a tehetséges tanulót? Hogyan lehet mérni a tehetséget, mégpedig úgy mérni, hogy az globális és objektív legyen? Ugyanis az iskola régióbeli elhelyezkedése, a beiskolázási környezet, a szociális háttér, a tanulók és a szülők igény szintje, a motiváció erősen befolyásolja mind a globalizációt, mind az objektivitást.

Előfordulhat az az eset, hogy egy átlagos képességű tanulót is a tehetségesek közé sorol a tanár, ha a viszonyítási alap – például az osztály tanulójának képzettsége, képessége – gyenge, vagy az átlagosnál gyengébb, és fordítva. Jó képességű, tehetséges tanulót is sorolhatnak az átlagosok – a nem kiemelkedők – közé, ha a viszonyítási alap – a környezet – nagyon jó. Mindkettő veszélyes, mert a valóságnak nem megfelelő, téves információkat szerez a diák, a tanár és a szülő.

Amikor viszont kilép szűkebb környezetéből a tanuló, és összeméri másokkal képességeit, jön a szomorú csalódás. Erre egy eklatáns példa a következő:

Évek óta e jegyzet szerzője állítja össze a TIT Kalmár László Országos Matematika Verseny feladatsorait, és vezeti le a versenyt. Ezen az országos megmérettetésen az ország 19 megyéjének és Budapestnek azon két-két 3. és 4. osztályos tanulója vehet részt, akik a megyei versenyek első két helyén végeztek. Tehát mondhatjuk, hogy megyénkben ők a legjobbak – azaz saját régiójukban, iskolájukban, osztályukban tehetségeseknek tartják őket. A versenyeredmények sok esetben megdöbbentőek. Szinte minden alkalommal találkoztunk több olyan tanulóval, akik a megszerezhető pontszámok 10-15 %-át, és olyanokkal, akik 85-90 %-át érték el.

Ez is azt mutatja, hogy a tehetség megítélése nagyon szubjektív, esetleges lehet, ha a mérőlapok összeállításakor, vagy a tanulói teljesítmények vizsgálatakor nem járunk el kellő körültekintéssel, és a tehetségekre jellemző tulajdonságok közül önkényesen preferálunk néhányat a többi jellemző vonás rovására. Például, ha valakinek jó a számolási készsége, az nem biztos, hogy matematikából is jó. A matematika lényegesen több, mint fogalmak, algoritmusok alkalmazásának elsajátítása.

A matematikai képesség a valóság magyarázatára és leírására egyetemesen alkalmazott matematikai gondolkodásmódot jelent.

Mint Vincze Szilvia tanulmányából kiderül, a perifériális összetevők, mint például a memória, lényegkiemelés, asszociáció, számolási készség, algoritmikus gondolkodás, emlékezet, megfigyelőkészség, koncentráció, problémaérzékenység stb. szükségesek a tehetséggé váláshoz, de nem elégségesek. A centrális összetevők, mint a kreatív gondolkodás, a következtetésekre való képesség, a mennyiségi gondolkodás magas szintű alkalmazása is nélkülözhetetlen ahhoz, hogy a tanuló tehetséggé váljon. (Vincze Szilvia: A kreativitás és a matematikai teljesítmény kapcsolata, 15 év a tehetségekért: elmélet és gyakorlat, Debreceni Egyetem, 2004)

Ezek után viszonylag könnyen választ adhatunk arra a kérdésre, hogy hogyan dönthető el egy tanulóról, hogy az tehetséges-e matematikából, vagy sem. Olyan mérőlapokat, teszteseteket kell készítenünk, amelyekkel az itt felsorolt tulajdonságokat mérni tudjuk.

Természetesen a mérőlapok matematikai tartalmat dolgoznak fel, de vigyáznunk kell arra, hogy a matematikai tartalmakban a tanulónál jelentkező esetleges hiányosságok ne befolyásolják a pszichés tulajdonságok meglétére vonatkozó információszerzésünket.

Mondjuk ezt annak tudatában, hogy alapvető – és egyre bővülő – matematikai ismeretek hiányában nem is beszélhetünk matematikai tehetségről.

Nézzük konkrétan, hogy mely tulajdonságokat kell vizsgálnunk:

- kreatív személyiségtulajdonságok,
- gondolkodási műveletek,
- algoritmikus gondolkodás, cselekvéssorozat végrehajtása,
- értelmes, elemző olvasás, szövegértelmezés, szövegértés,
- számolási készség,
- teljességre törekvés.

Ha végignézzük ezen a felsoroláson, elmondhatjuk, hogy ennyi pszichés tulajdonsággal egy általános iskolai, középiskolai, sőt felsőoktatásban résztvevő tanuló sem rendelkezhet. Ebből adódóan mondhatjuk, hogy annál tehetségesebb a tanuló, minél több ilyen tulajdonsággal rendelkezik.

Az is nyilvánvaló, hogy a gondolkodási műveletek megléte alapja (feltétele) a többi tulajdonság kialakulásának. Pszichológiai kutatások viszont kimutatták, hogy a formális gondolkodási műveletek 9-11 éves korban kezdenek kialakulni, vagy olyan szintet elérni, hogy a tudatos – viszonylag magas szintű – matematikai tevékenységben hatékony szerepet játszanak. Korábbi időszakokban ezen gondolkodási műveleteknek csak csíráival, de az adott szinten jól alkalmazható képződményeivel rendelkeznek a tanulók. Ez viszont arra figyelmeztet, hogy az életkort, vagy ami ezzel szoros kapcsolatban van, a tanulók képességét, képzettségét figyelembe kell venni a mérőlapok, tesztek összeállításakor. Nem támaszthatunk irreálisan magas követelményeket a tanulókkal szemben. (Mondjuk ezt akkor is, ha a gondolkodási műveletek fejlettsége nem feltétlen életkorfüggő. Két 10 éves gyermek között is lehet akár 4-5 év fejlettségbeli különbség.)

Ettől függetlenül a matematikai tehetség már 6-10 éves korban is megmutatkozhat. A tanulók saját korosztályát lényegesen meghaladó szinten képes teljesíteni matematikából.

Ez abból is kiderül, hogy a tehetséges gyerek megoldása legtöbbször eredeti (nem a tanár által bemutatott megoldást reprodukálja), kérés, felszólítás nélkül általánosít, kiterjeszt, bizonyít (indokol), törekszik a teljességre, és nagyon gyakran a tanár által nem mondott, vagy a könyvben le nem írt összefüggéseket is meglát.

Például csak a matematikai tehetségektől várhatjuk el azt, hogy ha megmutattuk, hogy bármely két különböző racionális szám számtani közepe a két szám közé esik, azaz $a < b$

esetén $a < \frac{a+b}{2} < b$ teljesül, akkor észrevegye azt, hogy bármely két különböző racionális szám között végtelen sok racionális szám van.

A matematikai példák gazdag kínálatot jelentenek a tehetséges tanulók matematikai képességeinek mérésére. Az is nyilvánvaló, hogy ezek a képességek, jártasságok, készségek nemcsak a matematikai tevékenységben mutatkoznak meg, hanem az élet egyéb területén, más tantárgyaknál, a gyakorlati alkalmazhatóságnál is.

Tehetségfejlesztés az iskolai oktatásban

Az ember nem születik kész matematikai képességekkel. Az öröklés erősen befolyásolja, nagymértékben meghatározza az ember megismerő folyamatának sajátosságait, de ezek az adottságok csak feltételei a tehetség kialakulásának. Csak a tárgyakkal, az eszközökkel, modellekkel, a technikával, a kultúrával való aktív kapcsolatok révén, tehát a társadalmi tényezőkkel való szoros együttműködéssel alakulnak ki a gondolkodási műveletek, a kreatív személyiségtulajdonságok és a többi korábban felsorolt tehetségekre jellemző ismérv. Ha a személyi, tárgyi feltételek adottak, akkor a matematikával való aktív kapcsolat révén megindulhat a matematikai képesség struktúrájának – és ezzel együtt a tehetségeket jellemző tulajdonságoknak – a kialakulása.

Vizsgáljuk meg, hogy melyek azok a tényezők, amelyek feltételei a tehetségek kialakulásának. (Természetesen a tanulók örökletes sajátosságain túl.)

- Megfelelő környezet. (Ösztönzés a jó teljesítményre.)
- Magas társadalmi, iskolai, szülői igényszint.
- Erős tanulói (belső) motiváció.
- A tananyag tartalma. (Érdekesség, korszerűség, felépítettség, alkalmazhatóság, az életkornak, érdeklődési körnek megfelelő színvonal.)
- Az optimálisan megválasztott munkaforma, módszer, eszköz.
- A megfelelő tárgyi feltételek.
- Hozzáértő, kreatív, tehetséges pedagógus, nagy szakmai tudással, jó módszertani kultúráltsággal, magas didaktikai felkészültséggel, pedagógiai tapintattal.

A felsorolás utolsó négy pontja az, ami döntő szerepet játszik az iskolai tehetségfejlesztésben, az első három, pedig szubjektív előfeltétele a tehetség kialakításának.

A *tananyag tartalmát* meghatározza a tanterv. Sajnálatos, hogy a matematikai kerettantervek nem szolgálják a tehetségfejlesztést, hanem az úgynevezett „tömegoktatásra”, az alapok, a minimumok elsajátíttatására ösztönzik a pedagógust.

Elég kiemelnünk az óraszámok drasztikus csökkentését, majdnem változatlan tananyag tartalom mellett, és a nem szakrendszerű képzés favorizálását 5. és 6. osztályokban. Például 5. osztályban – iskoláktól függően – a heti matematika órák számát 5-ről 4-re, vagy 4-ről 3-ra csökkentették. Ez a 20-25%-os óraszámcsökkentést jelent, miközben a megtanítandó tananyagot nem csökkentették. Ez a pedagógusok zömét – tehetségfejlesztés tekintetében – szinte megoldhatatlan probléma elé állítja az órán.

A nem szakrendszerű oktatás általánossá tétele – azaz 5. és 6. osztályban alsó tagozatos tanítók tanítanak például a matematikát képességfejlesztés címszó alatt – azt eredményezné, hogy éppen a legfontosabb, a megalapozó, előkészítő szakaszban a tehetségfejlesztésre képzett tanárokat „eltiltják” a matematikatanításától. (Egyébként ez a veszély a többi tantárgynál is jelentkezik.)

E két példából is kiderül, hogy a hazai oktatásunk vezetőinek intézkedései egyáltalán nem szolgálják a tehetségfejlesztést.

Ebbe beletörődni nem szabad. Minden iskolának, minden pedagógusnak törekedni kell arra, hogy a tehetségesnek tartott tanulókkal külön foglalkozzunk tanórán kívül is, pótolva azt a hiányt, amit a tehetséges tanulók elszenvednek a tanórákon. (Szakkörök, versenyekre felkészítő foglalkozások stb.) Az ilyen foglalkozásokon lehet túllépni a kötelező minimumon, itt lehet megmutatni a matematika szépségét, itt lehet kialakítani – sok sikerélménnyel – a matematika iránti belső motivációt, itt szárnyalhat a tehetséges gyerek fantáziája.

Viszont elmondható, hogy az előbb említett hátrányok kompenzálására – talán érezve a tehetséggondozásra leselkedő veszélyt – nagyon sok olyan kiadványt jelentettek meg, amely kifejezetten tehetséges gyerekek készült, akár önálló feldolgozásra is. Ebben az esetben az a pedagógus feladata, hogy a megfelelő irodalmakat ajánlja a tanulóknak, feldolgozási, megoldási útmutatókat adjon, és végül közösen elemezzék a megoldásokat.

Az optimálisan megválasztott munkaforma, módszer, eszköz erősen csökkentheti az előzőekben mondott hátrányokat. A tanórai differenciálás, a csoportmunka, az individualizált foglalkoztatás lehetővé teszi, hogy minden – vagy majdnem minden – tanuló a saját adottságának, képességének, képzettségének megfelelő ütemben, szinten, minőségben, mennyiségben sajátítsa el a tananyagot. A tehetséges tanulókat inkább önálló munkára

buzdítjuk, a mindenkitől elvárt minimumnál lényegesen többet kérünk (és adunk) nekik mind mennyiségben, mind minőségben.

Ha a pedagógus szakmai, pedagógiai-pszichológiai felkészültsége, módszertani kulturáltsága jó, akkor el tudja érni azt, hogy a tanulók ne készen kapják az ismereteket, ne passzív befogadók legyenek, hanem aktív, felfedező munkával vegyenek részt az ismeretszerzésben. Csak tanári előadással, ismeretek közlésével még az átlagos, vagy annál gyengébb tanulók esetében sem tudunk kialakítani tartós, alkalmazható, értékes ismereteket. A tehetséges, jó matematikai képességű tanulóknál meg egyenesen bűn ennek a módszernek a túlzásba vitele.

Fontos, hogy érvényesüljenek a Pólya-féle tanítási-tanulási alapelvek:

- az aktív tanulás elve,
- az egymást követő fázisok elve,
- a legjobb motiváltság elve.

Bármelyik alapelvet megsértjük, akkor sérül a korábban felsorolt, a tehetséges tanulókra jellemző sajátosságok kialakítása, kialakulása is.

A tehetséges tanulókra is érvényes a matematikai ismeretelsajátítási folyamatra vonatkozó skempi alapelv:

„Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy a megfelelő példák sokaságát nyújtjuk. Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.”

Ez a skempi alapelv teljesen összhangban van a Pólya-féle alapelvekkel. Ez is az aktív tanulást, a felfedeztetést, az egymásra építettséget, a fokozatosságot sugallja. A matematikából kevésbé képzett tanuló a megfelelő példákból, a manipulatív tevékenységből éppen annyit fedez fel, ami a kevésbé fejlett matematikai tevékenységhez szükséges, míg a jó matematikai képességekkel rendelkező, tehetséges tanuló a tapasztalatok feldolgozása után új kapcsolatokat, összefüggéseket fedezhet fel, új megoldási módszereket találhat, és más területen is próbálja alkalmazni ismereteit. Így biztosítható az, hogy minden tanulóból a legtöbbet hozzuk ki, akár felzárkóztatásra szorul, akár tehetséggondozásban vesz részt.

A megfelelő tárgyi feltételek, az ismeretek elsajátításában alkalmazott eszközök, modellek szintén nélkülözhetetlenek a tehetséggondozásban. Bármelyik korosztályú

tanulócsoportot is tekintjük, például a száraz úgynevezett „krétamatematikával” unalmassá tesszük mind az ismeretszerzést, mind a gyakorlást, az alkalmazást. Viszont az eszközökkel történő cselekvés, a manipulatív tevékenység, a tananyag társasjátékos, versenyszerű feldolgozása révén a tanuló játszva tanul, nem tekinti fárasztó komoly munkának az ismeretszerzést, holott tudjuk, hogy a szellemi tevékenység az egyik legfárasztóbb munka.

Ennek az elméletnek egyik magyar úttörője volt Dienes Zoltán, aki olyan eszközöket, modelleket, játékokat, eljárásokat, mozgásokat fejlesztett ki, amelyekkel kisgyermek kortól felnőtt korig mindenki szívesen dolgozott, s játszva tanult meg nagyon komoly matematikai fogalmakat, ismereteket, szabályokat, algoritmusokat.

Csak két olyan könyvet említünk Dienes Zoltán munkáiból, amelyek nem hiányozhatnak egy matematikatanár könyvespolcáról sem:

Dienes Professoror játéka (Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1989)

Építsük fel a matematikát (SHL Hungary Kft, Budapest, 1999)

Az eszközökkel, modellekkel való, játékos formában történő felfedezettő tanulást nevezzük *természetes tanulásnak*. Ez könnyed, szórakoztató, érdekes, és ebből adódóan kevésbé fárasztó, míg a rossz értelemben vett hagyományos tanulás, az értelmezés, definiálás, tételkimondás, bizonyítás, alkalmazás, – azaz a *mesterséges tanulás* – fárasztó, kimerítő kevésbé hatékony.

A tehetséggondozás, a tehetségek kialakítása és fejlesztése eredményesen csak természetes tanulás útján valósítható meg.

A pedagógus személyisége meghatározó a tehetségek kiválasztásában, fejlesztésében. Túlzás nélkül állíthatjuk, hogy csak nagy szakmai tudású, kreatív, jó módszertani kulturáltságú pedagógus képes a tanulóknál a tehetséget – annak minden jellemzőjével – a felszínre hozni. Az ilyen tanárt jellemzi az érdeklődés felkeltése és magas szinten tartása, a többirányú vizsgálatra való törekvés, a jó előadói készség, a magas szintű problémamegoldás és még hosszan lehetne sorolni.

A tanuló legyen bármilyen korú, igyekszik tanárát „utánozni”, gondolkodásmódját, tevékenységét követni, és ebből adódóan sajátjává válnak azok a tulajdonságok, amelyek a tehetséget jellemzik. (Ez természetesen csak akkor igaz, ha a tehetséghez szükséges örökletes tényezők megvannak a tanulóban.)

A fentiek igazolására elég felidézünk nagy tudósoknak, akadémikusoknak, felfedezőknek a rádióban, tévében, az írott sajtóban elhangzott nyilatkozatait. Ők a tehetségük felfedezését, kialakulását, fejlesztését egyértelműen a jó tanári indíttatásnak tulajdonítják.

Mivel a matematika nagyon absztrakt tudomány, mindig célszerű konkrétumokkal előkészíteni a fogalmak, ismeretek kialakítását.

A Műszaki Tankönyvkiadó által kiadott Hajdu-féle tankönyvcsalád – ami 1. osztálytól 12. osztályig tartalmaz tankönyveket, kézikönyveket, feladatgyűjteményeket, mérőlapokat, eszköztárat, megoldási útmutatókat – felépítése olyan, hogy az megfelel az itt leírtaknak. Mindig cselekedtetéssel, tapasztalatgyűjtéssel indít, ennek segítségével kiemeli a lényeget, sejtéseket fogalmaz meg, összefüggéseket tár fel, majd ezután fogalmazza meg a definíciókat, tételeket, és az algoritmusokat, végül gyakorlati példákon alkalmazza a megtanult ismereteket. Ez az út teljes összhangban van Skemp és Pólya, valamint Dienes tanítási-tanulási alapelveivel.

A tankönyvcsalád óriási segítség azoknak a pedagógusoknak, akiknek a szakmai, pedagógiai-pszichológiai felkészültsége hiányos, továbbá a tanulónak az önálló tanuláshoz, illetve a szülőnek, ha segíteni akar gyermekének a tanulásban.

Zárjuk a fejezetet egy rövid összeggel:

A tehetség óriási kincs. A tehetségek viszik a vállukon a társadalmat, a gazdaságot, a kultúrát, a művészetet, a tudományt, hogy csak néhány területet emeljünk ki.

Tehetségek nélkül egy ország a szürke átlagba, vagy az alá süllyedne, más országok kiszolgálója lenne, a szegénység, a sivárság lenne rá jellemző. Éppen ezért szükséges az, hogy az oktatásunk minél több kreatív, jó problémamegoldó képességgel rendelkező, széles látókörű, divergens gondolkodású, azaz tehetséges embert neveljen ki. A társadalomtól, pedig az a minimális elvárás, hogy ezeket a tehetségeket felkarolja, értékelje, megbecsülje.

Kulcsszavak

tehetség

a tehetség területei

matematikai tehetség

a matematikai tehetség jellemzői

tehetségfejlesztés az iskolában

természetes tanulás, mesterséges tanulás

Kérdések, feladatok:

1. Sorolja fel a tehetség fogalmának általános jellemzőit!
2. Milyen jellemzői vannak a matematikai tehetségnek?
3. Milyen országos matematikaversenyeket ismer?

Elemézzen egy-egy feladatsort egy általános iskolai, és egy középiskolai matematikaversenyről a tehetségfejlesztés szemszögéből!

Kötelező irodalom:

1. Erika Landau: A kreativitás pszichológiája
Tankönyvkiadó, Budapest, 1974
2. Tóth László: A tehetségesek tanítása
Debrecen, Kossuth Egyetemi Kiadó, 2000
3. Dr. Czeglédy István: A 10 éves tanulók matematikai képességeinek fejlettsége egy felmérés tükrében
Tudásbázis és Pedagógusképzés, Nyíregyházi Főiskola, 2007

Ajánlott irodalom:

- Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I-II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
- Vincze Szilvia: A kreativitás és a matematikai teljesítmény kapcsolata.
15 év a tehetségekért: elmélet és gyakorlat, Debreceni Egyetem, 2004

XI. Hátránykompenzáció a matematikaórákon és a tanórán kívül

Az előző fejezetben a tehetségekkel foglalkoztunk, megmutattuk a tehetséges tanulókat jellemző pszichés tulajdonságokat, és szóltunk arról is, hogy hogyan lehet a matematikai tehetséget fejleszteni. A mai közoktatás jellemző sajátossága az, hogy sajnos lényegesen több olyan tanuló van, aki felzárkóztatásra, hátránykompenzációra szorul, mint olyan, aki tehetséges a matematikában. Ezek a tanulók legalább annyi figyelmet érdemelnek, mint tehetséges társaik.

Milyen okai lehetnek a hátrányos helyzet kialakulásának?

- Genetikai tényező: nincsenek meg a tanulóban azok az adottságok, képességek, amelyek az eredményes tanuláshoz szükségesek.
- Tanulói attitűdök: hiányzik az akarat, a kitartás; figyelmetlenség, fegyelmezetlenség és az érdeklődés hiánya. Nem motivált a munkára.
- Tanulótól független (objektív) okok: tartós hiányzás, rossz szociális helyzet, a tanulást nem segítő környezet, egyéb hátráltató tényező (például: bejárás, korai kelés-késői fekvés, a tanulási lehetőség hiánya stb.), a szülői nemtörődömség és a csekély szülői igény szint.
- Pedagógiai tényezők: az iskola nem teremti meg a személyi és tárgyi feltételeket az eredményes oktatáshoz.

Hosszan lehetne még folytatni a felsorolást, de ez a négy terület nagyrészt felöleli a tanítási-tanulási folyamatban fellelhető negatív tendenciákat előidéző okokat.

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy mi jellemzi a hátránykompenzációra szoruló tanulókat, mint a tehetség ellenpólusát.

(A felsorolás nem fontossági sorrendet jelent, és nem teljes.)

- Memóriabeli adottságok hiányossága.
- Gondolkodási műveletek fejletlensége.
- Az értő olvasás hiánya, azaz a lényeglátás, a lényeges jegyek kiemelésére való alkalmasság gyenge volta.
- Nem megfelelő számolási készség.
- Az algoritmikus gondolkodásban, a tervszerűségben mutatkozó hiányosságok.
- Felszínes megfigyelőképesség, és a gyenge koncentráció.
- A problémaérzékenység fejletlensége, a természetes kíváncsiság hiánya.

Ezek bármelyikét előidézhetik a korábban felsorolt okok, és nem jelentkezik az összes ismérv egy-egy tanulási nehézséggel küzdő tanulónál. Sajnos már néhány ilyen hiányosság esetén is szükséges a hátránykompenzáció.

Természetesen most nem a fogyatékkal élő tanulókat vizsgáljuk, bár ők is besorolhatók ezek közül valamelyik kategóriába, hanem olyan átlagos, vagy annál gyengébb képességű tanulókat, akik akár genetikai, akár egyéb okból nem tudnak lépést tartani a társaikkal a tanulás terén.

Ide soroljuk azokat a tanulókat is, akik iskolaváltás esetén egy lényegesen „erősebb” iskolában folytatják tanulmányaikat, és azonnal nem tudják felvenni a versenyt a már ott lévő, vagy erősebb iskolából jött társaikkal.

Tehát a hátrányos helyzetet vizsgálva nagyon heterogén képet kapunk. Nagyon sok tanuló szorul hátránykompenzációra, és nagyon sokféle ok idézheti elő a hátrányos helyzetet. A tanár első feladata, – minden új osztály esetén – hogy felmérje tanulóinak adottságát, képességét, képzettségét, és ennek megfelelően alakítsa ki a követendő stratégiát.

A Hajdu-féle tankönyvcsalád szerzői felismerték azt a problémát, hogy a felső tagozatba, illetve a középiskolába kerülő tanulók között óriási képzettségbeli különbségek lehetnek. Olyanok, amelyek gátjai az eredményes matematikatanulásnak. Ezért mind az 5. osztályos, mind a 9. osztályos tankönyvek első fejezetét (ez átlagban 1 hónap időtartamot jelent) a „szintre hozásra” szánták. Ez ugyan nem old meg minden gondot, de legalább csökkenti a tanulók közti óriási különbséget, és megteremti a továbbhaladáshoz szükséges egységes alapokat a legtöbb tanulónál.

A hátránykompenzáló tanítási stratégia alapja a tanár részéről a mérhetetlen türelem, megértés, empátia, pedagógiai tapintat, módszertani kultúráltság.

A tanulási stratégia jellemzői:

- a tanulók szintjének megfelelő, lassú haladási ütem,
- a „kis lépések elve”; egymásra építettség, fokozatosság, érthetőség, értelmezhetőség,
- fokozottabb eszközhasználat; hangsúlyozott heurisztika,
- nagyobb tanári segítség; megfelelő kérdéskultúra,
- sok bevésés, begyakorlást segítő egyszerű feladat; jártasságok, készségek kialakítása,
- a gyenge tanulási képességek fejlesztését szolgáló feladatok betervezése az órai munkába,
- megfontolt, fokozatos haladás a problémamegoldó gondolkodás kialakításáig.

Mindezek a természetes tanulás velejárói.

Ez a stratégia osztálykeretekben csak úgy valósítható meg, hogy a hátránykompenzációra szoruló tanulókat egy osztályba soroljuk – lehetőleg kis létszámú osztályokba – és a számukra legmegfelelőbb munkaformát, módszert, eszközt választjuk.

Amennyiben nincs lehetőség ilyen speciális osztályok létrehozására az adott iskolában, akkor az osztálykeretekben történő differenciálás a követendő út. A differenciáláson túl szükséges ezen tanulók számára matematikából a heti óraszám növelése, és a tanórán kívüli foglalkozás (korrepetálás) is.

Végül meg kell jegyeznünk, hogy a hátrányos helyzet nem végleges állapot. Amennyiben a tanuló utoléri társait, megszűnik a hátránykompenzáció szükségessége is. Így a kiemelt figyelem is oka-fogyottá válik.

Kulcsszavak

a hátrányos helyzet kialakulásának okai

genetikus tényezők

attitűdök

környezeti hatások

a hátránykompenzációra szoruló tanulók jellemzői

hátránykompenzáló tanítási stratégiák

Kérdések, feladatok:

1. Sorolja fel a hátránykompenzációra szoruló tanulók jellemző sajátosságait!
2. Milyen stratégia alkalmazható a hátránykompenzáló oktatásban?

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Kelemen László: Pedagógiai pszichológia
Tankönyvkiadó, Budapest, 1981

Ajánlott irodalom:

- Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika programok 5-8.
Műszaki Kiadó, Budapest, 2009
- Dr. Czeglédy István-Dr. Hadházy Jenő: Eszköztár 3-5.
Műszaki Kiadó, Budapest, 2009

XII. Ellenőrzés, értékelés, osztályzás matematikából

Az ellenőrzés, az értékelés, az osztályzás örök problémája volt és lesz az oktatásnak. Egyes országokban – biztosítandó a szorongásmentes légkört – a tanórán csak ismeretátadásra, a tanulásra koncentrálnak. Évközben nincs osztályzás (esetleg csak szóban értékelés), s csak bizonyos időszakok után tesznek a tanulók minősítő (a továbbhaladáshoz nélkülözhetetlen) vizsgákat. Máshol az évközi, a félévi, az év végi – osztályzattal történő – értékelés fontos része az oktató, nevelő munkának, illetve feltétele a továbbhaladásnak.

Mindkét álláspontnak megvannak a maga előnyei és hátrányai. A magyarhoz hasonló rendszer a folyamatos ellenőrzést, értékelést helyezi előtérbe, míg a másik a szakaszos ellenőrzés, értékelés híve. Tehát nem a tartalomban, hanem a formában, a kivitelezésben van inkább különbség a két fajta elv között.

Mindkettőre jellemző, hogy az ellenőrzés, az értékelés legfontosabb funkciójának az *informatív funkciót* tartja.

Kelemen László szerint:

„A tanulók tanulmányi előhaladásának, valamint képességeiknek és személyiségfejlődésüknek ellenőrzése és értékelése mindenekelőtt tájékoztatás, visszajelentés a nevelő, a tanulók és a társadalom számára. Az ellenőrzés és az értékelés tükrében meglátják munkájuk eredményét, és ennek megfelelően történhet a további tökéletesítés.,,

(Kelemen László: Pedagógiai pszichológia, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981)

Az ellenőrzést, az értékelést sokan leszűkítik a tananyag elsajátításának, illetve az elért teljesítményeknek adminisztratív mérésére. Ez egyoldalú, ezért helytelen, hiszen, mint Kelemen László írja:

„...a nevelés és az oktatás személyiségfejlesztés, tehát az oktatás ellenőrzését és értékelését is a személyiségfejlesztés szempontjai alapján kell megvalósítani.”

Ez azt jelenti, hogy az iskolai oktatásnak teljesíteni kell a társadalom elvárásait. A matematikatanításra vetítve ez úgy jelentkezik, hogy nem csak azért tanítjuk például az egyenes arányosság témakört, hogy a tanulók helyesen el tudják azt mondani (bár ez sem szükségtelen), hanem azért, hogy a tanulók ismereteiket felhasználva, alkalmazva be tudjanak

illeszkedni a társadalomba. Legyen az ismeretük alkalmazásra képes, hasznos. Ne öncélúan tanítsuk a matematikát!

A teljesség igénye nélkül, nézzünk néhány példát arra, hogy – alkalmasan összeállított feladatsorokkal – milyen területekről szerezhetünk információkat.

– *Szövegelemzés, szövegértelmezés*

Szöveges feladatok ismertetése után kérjük a tanulókat, hogy emeljék ki a szövegből a szükséges adatokat, adják meg a köztük lévő kapcsolatot, sorolják fel a felesleges adatokat, szűrjék ki a „zajokat”.

Nagyon fontos, hogy a tanulók e területen minél jobb eredményt nyújtsanak, hiszen e nélkül nehezen képzelhető el komoly matematikai tevékenység, illetve a gyakorlati életben való eligazodás. (Elég csak egy kissé bonyolultabb űrlap, kérdőív kitöltésére gondolnunk, vagy a pályaudvarokon, repülőtereken, járműveken látható eligazító ábrákra.)

– *Számolási készség*

Azonkívül, hogy e nélkül sincs komoly matematikai tevékenység, még a gyakorlati életben való eligazodást is nagymértékben gátolja a számolási készség hiánya.

A zsebszámológépek elterjedése nem teszi szükségtelessé a számolást.

– *Beszédképesség*

A matematikai szaknyelv pontos használatával az egyszerűsége, célszerűsége törekvéssel elérhetjük azt, hogy a tanuló a gyakorlati életben, a mindennapi kommunikációban is törekedjen arra, hogy mondandóját röviden, tömören, érthetően fejezze ki.

– *A gondolkodási műveletek*

A jegyzet más fejezetében ez részletesen megtalálható. Itt csak annyit említünk meg, hogy a gondolkodási műveletek hiányos volta mind a fogalomalkotásban, a megértésben, mind a problémamegoldásban komoly gondot jelent.

– *Kreatív személyiségtulajdonságok*

Egy egyszerű példán szépen mutatható, hogy ez a fontos terület hogyan mérhető és fejleszthető.

Folytassuk a sorozatot minél többféleképpen!

1; 2; 4; ...

Néhány megoldás:

1; 2; 4; 7; 11; 16; 22; ...

1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; ...

1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; ...

1; 2; 4; 1; 2; 4; 1; 2; 4; ...

A megoldásokból sok következtetés levonható a rugalmasság, a hajlékonyság, az eredetiség, a teljesség stb. tulajdonságok meglétéről, vagy hiányáról.

– *Bizonyítási igény*

Nagyon sokat tehet ezen a területen a matematika. Rászoktathatjuk tanulóinkat arra, hogy állításaik mindig megalapozottak legyenek, ne legyenek fellengzősek, ne keverjék a feltételt a követelménnyel stb.

Mind a számelméleti, mind a geometriák példák – egyszerűségük és szemléletességük révén – jó szolgálatot tesznek abban, hogy a tanulók bizonyítási igényét kialakítani, illetve fejleszteni tudjuk, s arra is alkalmasak, hogy a bizonyításokban való jártasságukat mérjük.

Az ellenőrzés, az értékelés – jelenleg leginkább – a matematikai tartalmak elsajátításának mérésében, ezen eredmények értékelésében merül ki, a fent említett területeket nem vizsgálja. Valójában a tananyag elsajátítása magában hordozza annak lehetőségét, hogy a tanulás során a tanulók a kívánt nevelési, képzési területeken is fejlődjenek (éppen a tanítási-tanulási folyamat jellemzői miatt). Ezért javasoljuk a pedagógusoknak azt, hogy a témazáró mérőlapok, tesztek, röpdolgozatok értékelése során a megoldásban rejlő nevelési, képzési célok magvalósulásának mértékét is állapítsák meg. (Például ugyanazon feladatsornak más javítási útmutatót készítve, ahol nem a tárgyi tudás, a feladat hibátlan megoldása lenne a domináns, hanem az, hogy a tanuló milyen pszichés tulajdonságok meglétéről, hiányáról, milyen gondolkodási műveletek birtokáról tesz tanúbizonyságot.)

Az ellenőrzésnek, értékelésnek három fajtáját különböztetjük meg: formatív, szummatív, diagnosztizáló.

– *A formatív értékelés*

Folyamatos, évközi információszerzés, és ennek feldolgozása a tanuló munkájáról, a hiányosságok, a hibák, az eredmények feltárása a célja, hogy ezáltal a

továbbhaladáshoz szükséges információkat pótolni tudjuk, a meglévő ismereteket megerősítsük. (Nem feltétlen kíséri számszerű osztályzás.)

– *A szummatív értékelés*

Nagyobb időszakok lezárásakor mérhetjük, hogy a tanulók az adott időszak aktuális céljai közül (oktatási, nevelési, képzési) mennyit tudtak elsajátítani. Leíró, összegző, minősítő, összehasonlító ellenőrzési, értékelési forma.

(Félévi, év végi, valamint egy-egy tematikus egység megtanítása utáni ellenőrzések, értékelések tartoznak ide.)

A megfelelő szintek elérése az osztályzatokban fejeződik ki.

– *A diagnosztizáló értékelés*

A tanítási folyamat egyik legfontosabb láncszeme. Ahhoz, hogy egy tananyagot megtaníthassunk, szükséges ismernünk a tanulók előképzettségét. (Milyen ismeretekkel rendelkeznek, és milyenekkel nem, ahhoz, hogy az adott tananyagot el tudják sajátítani.)

A tervezéshez nélkülözhetetlen. Az előzetes felmérések teszik lehetővé azt, hogy meg tudjuk állapítani a kiindulási szinteket, azaz honnan indulhatunk az ismeretsajátítási folyamatban. Az itt elért eredményeket nem célszerű osztályozni, hanem – inkább kis részekre bontva a tananyagot – feltárni a hiányosságokat, majd azok pótlása után kezdeni az új ismeretek tanítását.

Röviden összefoglalva, és kiegészítve az eddigieket:

1. Az ellenőrzés információszerzés a tanuló munkájáról, előmeneteléről, eredményeiről.
2. Az értékelés ezen információk feldolgozása, amely visszajelzés a tanulónak, a tanárnak, a társadalomnak (a szülőknek), az elvárások és a teljesítettség közti eltéréseiről.
3. Az osztályzás az értékelésnek egy leszűkített formája, amely valamilyen skála szerint a tanulási teljesítményeket az elvárásokhoz, követelményekhez viszonyítva – valamilyen szinten – elhelyezi. Az elvárások az iskolatípustól, az osztálytól, a tanártól nagymértékben függenek, így az osztályzás is nagymértékben szubjektív. Feladatunk ezen a téren a szubjektivitás csökkentése, az objektivitás növelése.

Az ellenőrzésnek két fő formáját különböztetjük meg:

- írásbeli,
- szóbeli.

Mindkettővel lehet mérni – a tanulói teljesítményen túl – a korábban említett nevelési, képzési területeket is.

Az írásbeli ellenőrzés formái:

- kis terjedelmű téma írásbeli kidolgozása (tanórán beilleszthető az ismeretelsajátítási folyamatba),
- otthonra kiadott szorgalmi feladat megoldása (a követelményeket kis mértékben meghaladó ismereteket feltételező feladatok),
- házi feladat (az önállóan elkészített házi feladat ad csak elfogadható információt),
- röpdolgozat (5-10 perces, a szükséges alapismeretek meglétét térképezzük fel vele),
- teszt (kiegészítés, választás, algoritmusok ismerete mérhető jól ezzel a lappal),
- témazáró mérőlap (mind a szakaszos, mind a folyamatos ellenőrzésnek, értékelésnek legfontosabb eszköze).

Az első három formánál az informatív funkció, a következő kettőnél a szummatív funkció dominál.

A szóbeli ellenőrzés formái:

- egyéni felelés – táblánál,
- kiselőadások tartása, feladatok megoldásának elemzése (osztálykeretekben).

A szóbeli felelésnél értékes információkat nyerhetünk a tanulók lényeglátásáról, adatok közti összefüggések felismeréséről, kifejezőképességéről. Feltárhatjuk azokat a mozzanatokot, amelyek a matematikai tevékenységet gátolják, s kiküszöbölhetjük azokat – egyénre szabottan, hiszen minden tanulónak más-más problémája adódhat.

Matematikaórán mind az írásbeli, mind a szóbeli ellenőrzési módot célszerű használni, de a hosszú (10 percnél hosszabb) táblánál történő „feleltetésnek” nem

vagyunk a hívei. Már csak azért sem, mert egy tanulónak hosszabb szóbeli feleltetése időpazarlást eredményez, hiszen nagyon kevés gyerek vesz részt ilyenkor aktívan a közös munkában, tehát a többség számára felesleges időtöltés ez a 10 perc. Ha mégis alkalmazzuk, akkor a szóbeli feladatok lehetőleg legyenek rövidek, tömörök, lényegretörőek (például valamilyen tétel, algoritmus igazolása, feladat értelmezése).

A pedagógusok és a pszichológusok között mindig is vita volt (van) arról, hogy melyik forma a jobb. Az egyik nézet szerint a tanuló az írásbeli munkánál magára van hagyva, csak magára támaszkodhat, s ha kis hibát vét az elején, ez végig kíséri az egész munkája során. „Ridegnek”, „embertelennek” mondják ezt az ellenőrzési módot. A szóbelinél viszont azt tüntetik fel erényként, hogy kontaktus alakul a tanár és a diák között, kérdésekkel, kis segítséggel sikerélményhez juttatjuk a tanulót, ami motiválja őt a későbbiekben.

A másik tábor szerint a szóbeli felelés – éppen az előbb mondottak szerint – nem ad hiteles információt a tanuló teljesítményéről, mert abban nagy százalékban benne van a tanár – akárcsak mozdulatokkal, mimikával történő – segítése is. Az írásbelinél viszont, – ha a tanuló azt valóban egyedül csinálja – az információk a reális képet mutatják.

A mi álláspontunk az, hogy mindkét ellenőrzési módot alkalmazni kell a matematikatanításban, kevesebb szóbeli és több írásbeli információszerzés a célszerű. A szóbeli információszerzésnek is azt a módját támogatjuk, amikor frontális munkában tanár-diák dialógus módszerével (tehát lehetőleg minden tanulót bevonva a munkába) tájékozódunk a tanuló teljesítményéről.

Az érdemjegyek megállapításánál egyértelműen az írásbeli – tehát a teljesen önálló, problémamegoldó – munkának kell dominálnia. (Egy vélt arány: 70-30 százalék az írásbeli javára.)

Az értékelés, a szerzett információk feldolgozása, nagyon fontos funkciója az oktatási, képzési folyamatnak. Itt szembesül az elvárás a teljesítménnyel. Ebből tudja a tanuló, a tanár, a szülő, hogy mely területeken vannak hiányosságok, mely területeken szükséges többletmunka ahhoz, hogy a tanulók továbbhaladása biztosítva legyen.

Az értékelés mindig legyen objektív, előre mutató, és pozitív érzelmi töltéssel bíró. Ez utóbbi nem azt jelenti, hogy a hibákra nem kell rámutatnunk az értékelés

során, hanem azt, hogy a hiányosságokat, hibákat úgy kell a tanuló (szülő) tudomására hozni, hogy látszon belőle a tanár segítő szándéka.

Az értékelés foglalja magába a szükséges tennivalókat is. (Hogyan küszöbölheti ki a tanuló a hiányosságokat, hogyan őrizheti meg jó eredményét, mit kell tennie a jobb eredmény eléréséhez.

Az *osztályzás* az elért eredmények értékelésének egy módja, amely tájékoztatja a tanulót teljesítménye, képességei mértékéről, az osztályban, az iskolában elfoglalt rangsoráról. Ez az osztályzásnak az *informatív funkciója*.

Az osztályzásnak van egy *szelektív funkciója* is. Akár százalékosan adjuk meg az elért teljesítmény szintjét, akár osztályzattal, ez segít eldönteni azt, hogy a tanuló alkalmas-e a továbbhaladásra, alkalmas-e a más iskolatípusban történő tanulásra, alkalmas-e arra, hogy – osztályzatai alapján – valamilyen társadalmi funkciót betöltsön. (Gondolunk itt a javítóvizsgákra, a felvételi vizsgákra, a végbizonyítványokban lévő érdemjegyekre stb.)

Az osztályzat motiváló hatása nagyon erős. Egy-egy jó érdemjegy további jó munkára serkenti, míg néhány rossz jegy elkedvetleníti, fásulttá teheti a tanulót. Itt nagyon fontos a pedagógiai tapintat, a körültekintő objektív, megértő tanári értékelés ahhoz, hogy az osztályzás valóban pozitívan befolyásolja a tanulók munkáját.

Az osztályzatnak is megvannak az értékelésnél már mondott formái, az értelmezése is hasonló:

- informatív (évközi),
- szummatív (félévi, év végi).

Az évközi jegy figyelmeztet, nevel, jobb munkára serkent. A félévi, év végi osztályzat megállapít, rangsorol. Fontos, hogy a tanulónak minden teljesítményét értékeljük, de nem mindent kell osztályzattal értékelni. Az osztályzatoknak legyen meg a súlya, a helye a nevelési-oktatási-képzési folyamatban.

Témazáró mérőlapok tervezése matematikából

Hogyan lehet egy témazáró mérőlapot összeállítani, hogy az ellenőrzés, értékelés, az osztályzás negatív hatásai a legkevésbé, pozitív hatásai a leginkább érvényesüljenek.

Dr. Nagy József így ír erről:

„A témazáró mérőlap a gyakorló pedagógus eszköze, amely a tanuló tudásszintjének objektív értékelését, és a pedagógus saját munkájának önelemzését hivatott elősegíteni.”

(Dr. Nagy József: A témazáró tudásszintmérés gyakorlati kérdései, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972)

A témazáró mérőlappal szemben két nagyon fontos követelménynek kell teljesülnie:

- objektíven értékelje a tanulók tudását, teljesítményét,
- érvényesüljön a totalitás elve.

Az első követelmény azt jelenti, hogy bármely iskola, bármely osztálynak bármelyik tanulója azonos eredményre azonos értékelést kapjon. Egyrészt ez azért fontos, mert többször találkozhatunk olyan helyzettel, hogy a jó magatartású gyerekek kétes értékű osztályzatnál a jobb érdemjegyet, míg a rossz magaviseletű tanulók a rosszabb érdemjegyet kapják. Fontos, hogy a magatartás ne befolyásolja a teljesítmény értékelését.

Másrészt a tanárok által támasztott követelményekben is nagy különbségek vannak. A maximálistól az alig követelő típusig mindenféle megtalálható a tanárok között. Egy tudatosan, jól összeállított mérőlap kiküszöböli a tanárok közti értékelésbeli eltérést.

A totalitás elvének kettős jelentést tulajdonítunk:

1. Minden témakör, ami az év során feldolgozásra kerül – a követelményekben meghatározott súlyának megfelelően – szerepeljen a mérőlapokban. Azaz a mérőlap sorozat dolgozza fel az egész éves anyagot.
2. Az egyes témakörökön belül, a tananyag minden fogalma, összefüggése, algoritmus stb. – szintén megfelelő súlyozottsággal – legyen megtalálható a lapokban.

A témazáró mérőlap készítésének fázisai

- *A tényanyag gyűjtése*

Címszavakban kiírjuk mindazon anyagrészeket – tétel, definíció, fogalom, algoritmus stb. – amelyek az adott témakörhöz (vagy, ha egy mérőlapban több témakört dolgozunk fel, témakörökhöz) tartoznak.

Például 5. osztályban az egészek tényanyaga:

természetes szám,
negatív szám, az egészek halmazábrája,
számegyenes, koordinátarendszer,
nagysági relációk, egyenlőtlenségek, egyenletek,
abszolútérték,
összeadás, kivonás,
szorzás, osztás természetes számmal.

Ezáltal kiküszöbölhetjük azt, hogy némely tananyag kimaradjon, vagy túlfavorizált legyen.

– *Az anyagrészek fontosság szerinti súlypontosítása*

Bármilyen követelményrendszer irányítja munkánkat, mindig meg kell határoznunk, hogy mely anyagrészek azok, amelyek a továbbhaladáshoz feltétlen szükségesek, s melyek azok, amelyeket csak előkészítünk, s a későbbiek során újra foglalkozunk velük, azaz milyen ismereteket milyen szinten kell elsajátítani mindenkinek (minimum követelmény), s milyen ismereteket várunk el a legjobbtól (optimum követelmény). (Ehhez segítséget adunk a Hajdu-féle tankönyvcsalád Matematikai Programjaiban.)

– *A tényanyag „lefedése” feladatokkal*

Olyan feladatokat válogatunk, hogy ezekkel minden tényanyagot, s lehetőleg minden szinten reprezentáljunk. Így nagyon sok feladat gyűlik össze. Biztosan több, mint ami egy mérőlapba befér. Ezért a következő fázis:

– *A feladatok szétoztása az egyes csoportok között*

Ennél a fázisnál két szempontot kell figyelembe vennünk. A mennyiséget és a minőséget. A mennyiség figyelembevétele azt jelenti, hogy csak annyi feladat lehet egy mérőlapban, amennyit a tanulók 40 perc alatt (jól-rosszul) meg tudnak oldani. (45 perces tanórákat feltételezve).

A minőségi válogatás nagyobb körültekintést igényel.

Itt vesszük figyelembe azt, hogy mely feladatokkal mérünk minimum követelményeket, melyekkel átlagot, melyekkel optimumot. Szerencsés az elosztás, ha mindegyik csoportban minden minimumot mérő feladat megtalálható (természetesen különböző szövegű feladatokkal), s az átlagot, illetve az optimumot mérőket ad hoc-

szerűen felosztjuk a csoportok között úgy, hogy szem előtt tartjuk azt az elvet, mely szerint a különböző csoportok mérőlapjai nehézségi szintjének azonosnak kell lennie.

A feladatok minőség szerint történő szétosztása után ellenőrizzük, hogy mennyiségben is megfelelő-e a mérőlap. Javasoljuk a következőt: ha a tanár, mindent írva amit a gyerekek is írni kell, 10 perc alatt megoldja a feladatsort, akkor nagy valószínűséggel időben megfelel a lap. Tehát közel négyszeres időt célszerű adni a tanulóknak egy mérőlap megoldására. A tanulók munkatempója, munkaintenzitása különböző. Elkerülendő azt, hogy több tanuló idejekorán befejezze munkáját, célszerű szorgalmi feladatot adni. Ez lehetőleg optimumot mérő feladat legyen, olyan ami komoly elemző, problémamegoldó munkát feltételez: ezáltal azt is mérni tudjuk, hogy hány tanuló képes korosztálya többi tanulójánál nagyobb teljesítményre.

– *A pontozási szisztéma kialakítása*

Ezzel a fázissal tudjuk biztosítani az objektivitást. Minden feladatot olyan alternatív elemekre, részekre bontunk, amelyek megoldásáról egyértelműen eldönthetjük, hogy jó-e, vagy sem. Ezen alternatív elemeket, minőségüktől függően pontszámokkal látjuk el.

Célszerű a legegyszerűbb itemre 1 pontot adni, s ehhez viszonyítani a többi alternatív elemet, bizonyos szorzószámokat alkalmazva. Ezáltal egyrészt nemcsak a teljesen hibátlan feladatot értékeljük, hanem a tanuló minden hibátlan részfeladatát is, azaz nem marad teljesítmény értékeletlenül. Másrészt a részpontokat magatartástól, tanári kedélytől, az iskolatípustól függetlenül megkapja a tanuló, azaz érvényesül az objektivitás.

– *A pontok osztályzattá alakítása*

Egyes kutatók a pontszámok százalékaihoz igazítják az osztályzatot. Mi ettől eltérő osztályozási szisztémát javaslunk. Nem javasoljuk az elért százalék szerinti osztályzást. Egyrészt, mert ezt nem lehet minden mérőlapra abszolút módon alkalmazni.

Például: 5. osztályban a törtek témakörét sokkal alaposabban tanítjuk, ebből sokkal több jelentkezik minimum követelményként, mint a geometria témakörből, ahol éppen csak előkészítjük a következő években feldolgozandó anyagot. Tehát, ha mindkét mérőlapnál 30 %-os teljesítményt ér el a tanuló, az első esetben ez közel van az elégtelenhez, míg a másodikban a közepeshez.

Ehelyett azt javasoljuk, hogy számoljuk össze a megfelelő (tehát a minimumot, átlagot, optimumot mérő) itemekre adott pontszámot, és ennek alapján állapítsuk meg az érdemjegyeket. Például: ha a minimumszintet 20 pont jelenti – azaz ennyi olyan item van, ami minimum követelményt mér, – szerencsés az elégséges alsó határát 18 pontban meghatározni, 10 % tévedési lehetőséget biztosítva a tanulóknak. A jó és a jeles eredménynél ettől a 10 %-nyi „segítségől” eltekinthetünk.

– *A mérőlapok kipróbálása, javítása, korrekciója*

Bármennyire is tudatosan, körültekintően terveztük meg a mérőlapokat, elképzelhető, hogy nincs szinkronban a tanulók korábbi teljesítményével.

A két szélsőséges eset:

1. Nagyon rosszul sikerültek a dolgozatok.
2. Túl könnyűnek találták a tanulók, túl hamar és túl sokan hibátlanul oldották meg a feladatokat.

Az 1. esetben a következő okok idézhetik elő a problémát:

- a feladatok szövegezése nem volt egyértelmű, félreérthetőek voltak a feladatok, vagy olyan körülményes volt a megfogalmazásuk, hogy a tanulók számára érthetetlen volt,
- a feladatok nehézségi szintje lényegesen magasabb volt a követelményeknél,
- túl sok volt a feladat, a 45 perces óra kevésnek bizonyult a megoldáshoz.

A tényleges okot a tanulók munkájának elemzésével lehet kiszűrni. A második okot az is előidézheti, hogy magasabbra állítjuk a mércét a tényleges lehetőségnél, és az is, hogy nem tanítottuk meg kellően az adott ismereteket. Ha ilyen tapasztalatokat szerzünk, a mérőlap megírása után feltétlen korrigálnunk kell azt.

A feladatok szövegezését egyértelművé kell tenni. Inkább több egyszerű mondattal kell kérdezni valamit, mint egy hosszú összetett mondattal. Ha a feladatokban fellelhető követelmények szinkronban vannak az elvárttal, s a tanulók teljesítménye mégis gyenge, akkor elemezni kell a tanítási munkánkat. Milyen lehetőség van a hatékonyabb munkára, hogyan lehet megváltoztatni tanítási stratégiánkat.

Ha a feladatok megoldásai jók, csak kevés feladatot oldottak meg a tanulók, akkor csökkenteni kell a feladatok számát, vagy – ami ugyanezt eredményezi – egy-egy feladatba több ismeretet kell belesűríteni.

Ha túl könnyűnek bizonyul egy feladatsor az azért veszélyes, mert félreinformálja a tanulót, a szülőt és a tanárt egyaránt. Ekkor szintén meg kell vizsgálni a feladatok minőségét, s elvégezni a követelményekkel való összehasonlítást.

Ha nem találunk munkánkban hibát, akkor örülnünk kell, mert a tanulók a követelményeket nagyon magas szinten teljesítették. (Sajnos felméréseink szomorú statisztikája nem ezt mutatja.)

Egy évben célszerű 4-5 mérőlapot megírni a tanulókkal. Ez azt jelenti, hogy egy mérőlapon 2-3 témakör is előfordul.

Kulcsszavak

ellenőrzés, értékelés

formatív értékelés

szummatív értékelés

diagnosztikus értékelés

írásbeli ellenőrzés

szóbeli ellenőrzés

osztályzás

témazáró mérőlapok

Kérdések, feladatok:

1. Mely kompetenciaterületek hogyan mérhetők írásban és szóban?
2. Milyen ellenőrzési-értékelési fajtát ismer?
3. Egy tetszőlegesen választott osztályban, tetszőleges témakörben állítson össze egy diagnosztikus tesztet!
4. Elemezze a Hajdu-féle tankönyvcsalád Témazáró mérőlapjait a fejezetben leírt szempontok alapján!

Kötelező irodalom:

1. Dr. Czeglédy István: Matematika tantárgypedagógia I - II. főiskolai jegyzet
Bessenyei Kiadó Nyíregyháza, 2000
2. Kelemen László: Pedagógiai pszichológia
Tankönyvkiadó, Budapest, 1981
3. Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Témazáró felmérő feladatsorok matematikából 5-12. o.
Műszaki Kiadó, Budapest, 2008-2010

Ajánlott irodalom:

Dr. Nagy József: A témazáró tudásszintmérés gyakorlati kérdései

Tankönyvkiadó, Budapest, 1972

Dr. Hajdu Sándor szerkesztésében: Matematika programok 5-8.

Műszaki Kiadó, Budapest, 2006-2010

Dr. Czeglédy István: Teljes körű matematika tantárgyi képességmérés Miskolc város

általános iskoláinak 5. osztályában

Miskolci Pedagógus, Városi Pedagógiai Intézet, Miskolc, 2006

Javaslat a tananyag feldolgozásának ütemezésére

A félév során 12 hétre tervezzon:

1. hét:

A matematikatanítás cél-, feladat-, és követelményrendszere.

2. hét:

Az iskolai matematikatanítás alapelve és céljai.

3. hét:

A matematikai ismeretszerzés pedagógiai – pszichológiai modellje.

4. hét:

Definiálás a matematikában, definiálási hibák.

5. hét:

A gondolkodásfejlesztés és a gondolkodás lehetséges hibái.

6. hét:

Motiváció a matematikaoktatásban.

7. hét:

A gondolkodás fejlesztésének pedagógiai, pszichológiai vonatkozásai.

8. hét:

A matematikatanításban alkalmazott munkaformák, módszerek, eszközök.

9. hét:

A differenciálás szükségessége és lehetőségei a matematikatanításban.

10. hét:

Tehetségfejlesztés és tehetséggondozás az iskolai matematikaoktatásban.

11. hét:

Hátránykompenzáció a matematikaórákon és a tanórán kívül.

12. hét:

Ellenőrzés, értékelés, osztályzás matematikából.

Záróvizsga tételtek:

- 1) A matematikatanítás céljai a NAT tükrében.
- 2) Nevelési-, oktatási-, képzési célok a matematikatanításban.
- 3) A 6-10; a 10-14; a 14-18 éves korosztályú tanulók gondolkodásának jellemzői.
- 4) A matematikai ismeretszerzés pszichológiai és pedagógiai alapelvei.
- 5) A matematikatanulás pedagógiai és pszichológiai modelljei.
Piaget interiorizációs elmélete.
- 6) Definiálás a matematikában.
A definíciók fajtái, jellegzetes definiálási hibák.
- 7) A gondolkodás makrostruktúrája.
- 8) A matematikai gondolkodás mikrostruktúrája.
- 9) A tanár gondolkodásfejlesztő munkájának jellegzetes hibái.
- 10) A tanulók gondolkodásának jellegzetes hibái.
- 11) A motiváció szükségessége, lehetősége a matematikatanításban.
- 12) A matematikatanításban alkalmazott munkaformák, módszerek, eszközök.
- 13) A differenciálás szükségessége és lehetőségei a matematikatanításban.
- 14) A nívócsoportok szervezési kérdései a matematikatanításban.
- 15) Tehetséggondozás az iskolai matematikaoktatásban.
- 16) Hátránykompenzáció az iskolai matematikaoktatásban.
- 17) Ellenőrzés, értékelés, osztályzás a matematikaoktatásban.
- 18) Témazáró mérőlapok tervezése matematikából.